

Spektrallinienbildung
in bewegten, ausgedehnten Sternhüllen
unter besonderer Berücksichtigung der
Be- und Hüllensterne

Gerd Franz Pöllitsch

1975

Spektrallinienbildung
in bewegten, ausgedehnten Sternhüllen
unter besonderer Berücksichtigung der
Be- und Hüllensterne

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Gerd Franz Pöllitsch
München 1975



1. Referent: Prof. Dr. P. Wellmann

2. Referent: Prof. Dr. H.-G. Groth

Tag der mündlichen Prüfung: 16.12.1975

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
1. Einleitung	2
2. Das Modell	4
3. Formulierung des Problems	5
4. Berechnung der Ergiebigkeit und der Besetzungszahlen	9
4.1 Die H I - Zone	9
4.1.1 Die Besetzung des zweiten Quantenzustandes	11
4.1.2 Die Ergiebigkeit	14
4.2 Die H II - Zone	16
4.2.1 Der Strömgrenradius	16
4.2.2 Eine Abschätzung der Besetzungszahlen	19
4.2.3 Die Ergiebigkeit	22
4.2.4 Die Balmeremission	23
5. Spezielle Geschwindigkeitsfelder	24
5.1 Berechnung von Linienprofilen für schnell expandierende Hüllen	25
5.2 Berechnung der Flanken von Emissionslinien sehr schnell rotierender Hüllen	32
5.3 Numerische Berechnung von Emissionslinienprofilen	38
5.3.1 Emissionslinienprofile für expandierende Hüllen	39
5.3.2 Emissionslinienprofile für rotierende Hüllen	43
5.3.3 Emissionslinienprofile für rotierende Hüllen mit zusätzlicher Expansion	49
6. Ermittlung der die Hülle charakterisierenden Größen aus gemessenen Linienprofilen	51
6.1 66 Oph	54
6.2 ψ Per	58
Tabelle der verwendeten Symbole	63
Literaturverzeichnis	64

Zusammenfassung

Be- und Hüllensterne sind charakterisiert durch Atmosphären, deren Ausdehnung von etwa 20% bis zu einem großen Vielfachen des Sternradius reicht. Sie zeigen in ihrem Spektrum im allgemeinen neben den Sternlinien mehr oder weniger verbreiterte Emissions- und scharfe Absorptionslinien, deren Profil durch die Struktur der Hülle bestimmt ist.

Die ausgedehnte Atmosphäre (Hülle) dieser Objekte wird vielfach ring- oder scheibenförmig angenommen und der Unterschied zwischen Be- und Hüllensternen demnach nicht anderen Hülleneigenschaften zugeschrieben, sondern der Neigung dieser Scheibe gegenüber der Beobachtungsrichtung. Dagegen läßt sich einiges einwenden, vor allem aber, daß es mehrere Objekte gibt, die im Laufe ihrer Entwicklung sowohl reines Be- als auch Hüllenspektrum zeigen.

In dieser Arbeit wird nun ein einfaches sphärisches Modell konstruiert. NLTE-Effekte werden berücksichtigt. Es werden Wasserstofflinien für verschiedenen Gasdichteverlauf und verschiedene Geschwindigkeitsfelder berechnet. Es zeigt sich, daß sich Linienprofile, wie sie bei Novae, Wolf-Rayet-, P Cyg-, Be- und Hüllensternen beobachtet werden, durch das Modell erklären lassen.

Eine genauere Untersuchung der berechneten Linienprofile für Be- und Hüllensterne brachte folgendes Ergebnis:

Der Einfluß des Geschwindigkeitsfeldes und der Dichteverteilung auf ein Linienprofil läßt sich nicht eindeutig trennen.

Es wird eine Methode gezeigt, die es erlaubt, aus gemessenen Linien von Be- und Hüllensternen die prinzipiell zugängliche Information über den Dichteverlauf, die Ausdehnung der Hülle und über das Bewegungsfeld schnell zu erhalten.

Aus dem Vergleich des gerechneten mit einem gemessenen [22] H_{α} -Profil des Sternes γ Per konnten mit der Annahme eines abstandunabhängigen Drehimpulses ($\mathcal{V}(r) \cdot r = \text{const}$) und einem Photosphärenradius $R = 2,2 R_{\odot}$ [24] folgende Größen berechnet werden:

Sterntemperatur:	$T^* = 16500 \text{ K} - 17000 \text{ K}$
Wasserstoffdichte der Hülle:	$N(r) = 2,5 \cdot 10^{11} \cdot (R/r)^{3/2} \text{ cm}^{-3}$
Ausdehnung der Emissionszone:	$r_o = 4 R$
Gesamtmasse der emittierenden Hülle:	$M = 4,4 \cdot 10^{-11} M_{\odot}$

Im Fall 66 Oph lassen sich nur untere Grenzen für Dichte und Temperatur angeben.

1. Einleitung

Seit Struves Arbeit von 1931 [1] wird oft als gesichert angenommen, daß die Hüllen von Be-Sternen rotierende Ringe sind. Dafür spricht die Vorstellung, daß die hohe Rotationsgeschwindigkeit am Äquator (≈ 400 km/sec) das Ausströmen von Materie erleichtert.

Die hohe Rotationsgeschwindigkeit ist aber sicher nicht die einzige Ursache für die Hüllenbildung. Dazu sind die zeitlichen Variationen der Hüllendichte und der Radialgeschwindigkeiten der Hüllenlinien zu unregelmäßig; viele dieser Sterne zeigen sogar eruptives Verhalten. Am eindrucksvollsten zeigt das der gewaltige Ausbruch von ϵ Cas in den 30er Jahren (die Arbeiten [2, 3, 4, 4a, 5] geben eine Zusammenfassung der Geschichte dieses interessanten Sternes). Aber auch solide Hüllensterne wie ζ Tau zeigen in aktiven Phasen Expansionsgeschwindigkeiten bis nahezu 100 km/sec und ebenso hohe Kontraktionsgeschwindigkeiten [15]. Bei solchen Eruptionen wird sicher eine stärkere als nur ringförmige Einhüllung stattfinden.

Eine stärkere (wohl fast sphärische) Hülle muß man für 56 Eri annehmen. Die Burbidges [6] untersuchten ihn neben anderen "Pole on Stars". H_{β} z. B. hat eine so tiefe Zentralabsorption, daß sie durch das einfache Ringmodell nicht erklärt werden kann. Berechnungen von Kogure [7] erklären nur relativ flache Absorptionen. Auch ζ Tauri zeigte zeitweise so tiefe Zentralabsorptionen in den Balmerlinien [8], daß man, zumindest in diesen Phasen, eine vollständigere Umhüllung annehmen muß. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Hüllen von (allerdings) größeren Eruptionen, die man im Fernrohr auflösen kann (z. B. Supernovae, Novae oder auch Planetarische Nebel), meist eine annähernd sphärische Gestalt zeigen.

In dieser Arbeit wurde nun die Wasserstofflinienbildung in sphärischen Hüllen untersucht. Unter Zugrundelegung eines einfachen Modells, wurden Linienprofile in Abhängigkeit von

der Temperatur, der Dichte, der Dichteverteilung, der Rotationsgeschwindigkeit und deren Gradienten, zusätzlicher Expansionsgeschwindigkeit und der Ausdehnung der Hülle berechnet. Durch Anpassen der berechneten Profile an gemessene, konnten die entsprechenden Größen für die Hüllen der Sterne 66 Oph und Υ Per abgeleitet werden.

2. Das Modell

Eine klare Einführung in die Probleme, die bei der Behandlung der Linienbildung in ausgedehnten Atmosphären bei Berücksichtigung von Geschwindigkeitsfeldern auftreten, gab G. B. Rybicki 1969 anlässlich eines I.A.U. Colloquiums in München [9].

Das Problem läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man einer Idee P. Wellmanns folgend, die Strömgrensche Theorie [10] auf ausgedehnte Sternatmosphären anwendet. Demnach bildet sich in der Nähe des Sterns eine H II-Region mit einem Ionisationsgrad, der nahezu 1 beträgt. In einem bestimmten Abstand r_0 ("Strömgrenradius") vom Stern vollzieht sich dann ein plötzlicher Ionisationsabfall auf nahezu Null. Für die Ausdehnung dieser Übergangszone vom H II- zum H I-Gebiet wurde in einer früheren Arbeit ein Kriterium angegeben [11]. Sie erweist sich, solange r_0 überhaupt endlich ist, in den meisten Fällen als extrem klein. Für die Berechnung von r_0 wird weiter unten eine Näherungsformel angegeben.

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf eine reine Wasserstoffatmosphäre. Die meisten Ergebnisse, vor allem die Berechnung der Linienprofile, lassen sich aber auch auf andere Elemente übertragen.

Die Vereinfachung des Problems liegt nun darin, daß die H II-Region wegen des hohen Ionisationsgrades und der Unterbesetzung des zweiten Zustandes (Strahlungsverdünnungseffekt) als optisch dünn ($\tau = 0$) für Balmerquanten angenommen wird. Eine Streuung der Balmerquanten erfolgt nur in der H I-Region.

3. Formulierung des Problems

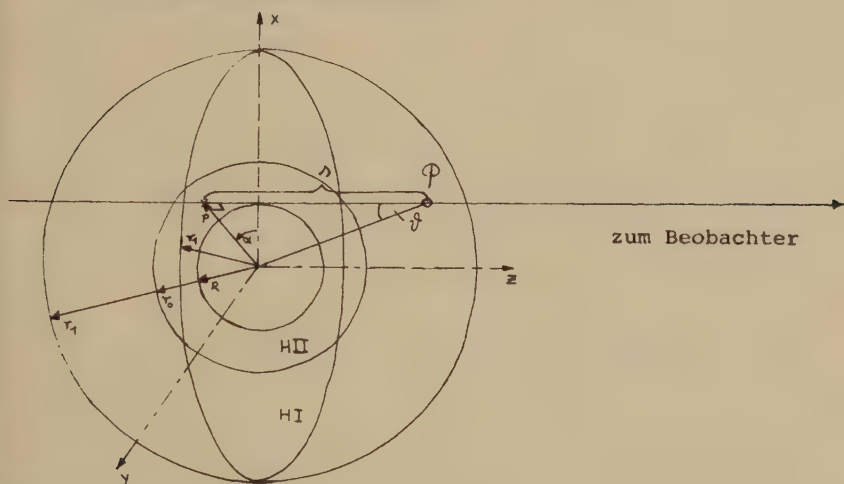


Abb. 1

Abbildung 1 zeigt schematisch den Stern mit dem Radius R , die H II-Region mit der Ausdehnung r_0 und die äußerste Hülle von neutralem Wasserstoff, die sich bis r_1 erstreckt. Ein Punkt P in der Hülle wird durch die Zylinderkoordinaten p , α und s festgelegt.

Die Intensität in Richtung zum Beobachter und in Abhängigkeit von p und α läßt sich sofort als formale Lösung der Strahlungstransportgleichung hinschreiben:

$$I_v(p, \alpha) = \left[I_v^*(p, \alpha, \lambda_a) + \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} x_v \cdot S_v \cdot e^{\int_{\lambda_a}^{\lambda} x_v ds'} \cdot e^{-\int_{\lambda}^{\lambda_e} x_v d\lambda} \right] \quad (1)$$

Dabei ist

$$\lambda_e = \sqrt{r_1^2 - p^2} \quad ; \quad \lambda_a = \begin{cases} \sqrt{R^2 - p^2} & \text{für } p \leq R \\ -\sqrt{r_1^2 - p^2} & \text{für } p > R \end{cases} \quad (2)$$

Die Ergiebigkeit ist

$$S_v = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \left(\frac{g_k N_k(\nu, p, \alpha)}{g_i N_i(\nu, p, \alpha)} - 1 \right)^{-1}; \quad (i < k) \quad (3)$$

$I_v^*(p, \alpha, \nu_a)$ ist die direkte Sternstrahlung (sie ist Null für $p > R$, es sei denn, man muß noch die Einstrahlung einer Doppelsternkomponente berücksichtigen).

Der Absorptionskoeffizient ist durch

$$\mathcal{K}_v = \frac{h\nu_{ik}}{c} B_{ik} N_i \left(1 - \frac{g_i N_k}{g_k N_i} \right) \cdot \varphi(\nu, p, \alpha, \nu) \quad (4)$$

gegeben.

Das Vernachlässigen der induzierten Emission ("negative Absorption") entspricht der Näherung

$$\left(1 - \frac{g_i N_k}{g_k N_i} \right) \approx 1 \quad (5)$$

Sei $\varphi^\circ(\nu, p, \alpha, \nu)$ die Profilfunktion des Absorptionskoeffizienten $\mathcal{K}_v^\circ$ bei ruhender Hülle, definiert durch

$$\varphi^\circ(\nu, p, \alpha, \nu) = \frac{\mathcal{K}_v^\circ}{\int_0^\infty \mathcal{K}_v^\circ d\nu} \quad (6)$$

also mit

$$\int_0^\infty \varphi^\circ d\nu = 1 \quad (7)$$

so ist die Profilfunktion bei Bewegung des Gases mit einer Geschwindigkeitskomponente $v(p, \alpha, \nu)$ in Richtung zum Beobachter

$$\varphi(\nu, p, \alpha, \nu) = \varphi^\circ\left(\nu - \nu_{ik} \frac{v(p, \alpha, \nu)}{c}, p, \alpha, \nu\right) \quad (8)$$

Die relative Intensität in der Linie (für den Beobachter) beträgt

$$i_v = \frac{\frac{1}{r_s^2 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} I_v(p, \alpha) \cdot p \, dp \, d\alpha}{\frac{1}{r_s^2 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} I_c(p, \alpha) \cdot p \, dp \, d\alpha} \quad (9)$$

$I_c(p, \alpha)$ ist die Intensität der kontinuierlichen Strahlung. Wegen der geringen optischen Dicke der betrachteten Hüllen (die Sternlinien sind durch die Hülle hindurch sichtbar), kann man die kontinuierliche Strahlung der Hülle vernachlässigen und erhält für den Nenner

$$\frac{1}{r_s^2 \pi} R^2 \pi F^* \quad (10)$$

πF^* ist der Strahlungsstrom an der Sternoberfläche.

Damit erhält man schließlich

$$i_v = \frac{1}{R^2 \pi F^*} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} I_v(p, \alpha) \, p \, dp \, d\alpha \quad (11)$$

Für die Linien (allerdings nicht für die Lymanserie, denn für die Lymanlinien kann die optische Dicke sehr groß sein) gilt somit (der Index I bzw. II bezieht sich auf die H I - bzw. H II - Zone):

a) $p < R$

$$I_v(p, \alpha) = \left[I_v^* + \int_{\sqrt{R^2 - p^2}}^{\sqrt{r_s^2 - p^2}} \chi_v^{\text{II}} \cdot \mu_v^{\text{II}} \, d\lambda + \int_{\sqrt{r_0^2 - p^2}}^{\sqrt{r_s^2 - p^2}} \chi_v^{\text{I}} \cdot \mu_v^{\text{I}} \cdot e^{t(\sqrt{r_0^2 - p^2}, \lambda)} \cdot d\lambda \right] \cdot e^{-t(\sqrt{r_0^2 - p^2}, \sqrt{r_s^2 - p^2})} \quad (12)$$

$$b) \quad R \leq p \leq r_0$$

$$I_v(p, \alpha) = \left[\int_{-\sqrt{r_0^2 - p^2}}^{\sqrt{r_0^2 - p^2}} \mathcal{K}_v^I \cdot \mathcal{J}_v^I \cdot e^{-t(\lambda, -\sqrt{r_0^2 - p^2})} \cdot d\lambda + \int_{-\sqrt{r_0^2 - p^2}}^{\sqrt{r_0^2 - p^2}} \mathcal{K}_v^{II} \cdot \mathcal{J}_v^{II} \cdot d\lambda + \int_{-\sqrt{r_0^2 - p^2}}^{\sqrt{r_0^2 - p^2}} \mathcal{K}_v^I \cdot \mathcal{J}_v^I \cdot e^{t(\sqrt{r_0^2 - p^2}, \lambda)} \cdot d\lambda \right] \cdot e^{-t(\sqrt{r_0^2 - p^2}, \sqrt{r_0^2 - p^2})} \quad (13)$$

$$c) \quad r_0 < p \leq r_1$$

$$I_v(p, \alpha) = \int_{-\sqrt{r_1^2 - p^2}}^{\sqrt{r_1^2 - p^2}} \mathcal{K}_v^I \cdot \mathcal{J}_v^I \cdot e^{-t(\lambda, \sqrt{r_1^2 - p^2})} \cdot d\lambda \quad (14)$$

mit der Funktion

$$t(\lambda_a, \lambda_e) := \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \mathcal{K}_v^I \cdot d\lambda \quad (15)$$

4. Berechnung der Ergiebigkeit und der Besetzungszahlen

Da es sich bei Modellrechnungen [14] gezeigt hat, daß die Ergiebigkeit nicht wesentlich von der Bewegung der Hülle beeinflußt wird, werden im folgenden die Ergiebigkeit wie auch die Besetzungszahlen für ruhende Hüllen berechnet, obwohl sie dann für bewegte Hüllen verwendet werden.

4.1 Die H I - Zone

Die neutrale Wasserstoffzone wird dem Modell nach als rein streuende Hülle angenommen, also

$$S_v = J_v = \frac{1}{4\pi} \int I_v d\omega \quad (1)$$

Die Strahlungstransportgleichung lautet dann

$$\cos\vartheta \frac{\partial I_v}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \vartheta} = \kappa_v (J_v - I_v) \quad (2)$$

$$\text{mit } \pi F_v = \int I_v \cos\vartheta d\omega ; \quad K_v = \frac{1}{4\pi} \int I_v \cos^2\vartheta d\omega$$

folgt daraus

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{dr} (r^2 F_v) = 0 ; \quad \frac{dK_v}{dr} + \frac{1}{r} (3K_v - J_v) = -\frac{\kappa_v}{4} F_v \quad (3)$$

und mit der Näherung $3K_v \approx J_v$ ergibt sich

$$\frac{dJ_v}{dr} = -\frac{3}{4} \kappa_v F_v(r) \quad (4)$$

Mit der Abkürzung

$$\tau' = \int_{r_0}^r \alpha_v \frac{r_0^2}{r^2} dr \quad (5)$$

und der Randbedingung bei r_1 [20]

$$j_v(r_1) = \frac{F_v(r_1)}{2} \quad (6)$$

ergibt sich

$$j_v(r) = \frac{1}{2} F_v(r_0) \left\{ \frac{r_0^2}{r_1^2} + \frac{3}{2} [\tau'(r_1) - \tau'(r)] \right\} \quad (7)$$

Aus der Randbedingung bei r_0 [20]

$$j_v(r_0) = - \frac{F_v(r_0)}{2} + F_{em}(r_0) \quad (8)$$

wobei $\pi F_{em}(r_0)$ der Strahlungsstrom ist, der vom Stern und der H II - (Emissions-) Zone herrührt, ergibt sich dann

$$j_v(r) = \frac{F_{em}(r_0)}{1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} + \frac{3}{2} \tau'(r_1)} \left\{ \frac{r_0^2}{r_1^2} + \frac{3}{2} [\tau'(r_1) - \tau'(r)] \right\} \quad (9)$$

und für $r_1 \rightarrow \infty$

$$j_v(r) = F_{em}(r_0) \frac{3}{2} \frac{\tau'(\infty) - \tau'(r)}{1 + \frac{3}{2} \tau'(\infty)} \quad (10)$$

4.1.1 Die Besetzung des zweiten Quantenzustandes

Betrachtet man jetzt speziell das $Ly-\alpha$ Strahlungsfeld, so kann man, da die Hülle für Lymanstrahlung optisch dick ist, für die Übergangsraten

$$n_{1 \rightarrow 2} = n_{2 \rightarrow 1}$$

setzen und erhält

$$N_1 \cdot B_{12} \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty j_\nu \cdot \varphi_\nu d\nu = N_2 \cdot (A_{21} + B_{21} \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty j_\nu \cdot \varphi_\nu d\nu) \quad (1)$$

woraus mit den bekannten Beziehungen zwischen den Einsteinkoeffizienten

$$A_{21} = B_{21} \frac{4\pi}{c} \frac{2 h \nu^3}{c^2} \quad ; \quad g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (2)$$

$$\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2} - 1 = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\int_0^\infty j_\nu \varphi_\nu d\nu} \quad (3)$$

folgt und damit

$$\frac{g_1 N_2(r)}{g_2 N_1(r)} = \left(1 + \frac{2 h \nu^3}{c^2 \cdot F_{em}(r_0)_{Ly-\alpha} \cdot \int_0^\infty \frac{[\tau'(\infty) - \tau'(r)]}{1 + \frac{3}{2} \tau'(\infty)} \cdot \varphi_\nu d\nu} \right)^{-1} \quad (4)$$

Sei τ definiert durch

$$\tau' = \tau \cdot \varphi_\nu$$

so gilt

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{[\tau(\infty) - \tau(r)] \cdot \varphi_v^2}{1 + \frac{3}{2} \tau(\infty) \cdot \varphi_v} dv = \\ & = \frac{\tau(\infty) - \tau(r)}{\tau(\infty)} \quad \text{für } \varphi_v = \delta(v - v_{12}) \quad a) \\ & = \frac{\frac{3}{2} [\tau(\infty) - \tau(r)] \frac{1}{2\Delta v_D}}{1 + \frac{3}{2} \tau(\infty) \frac{1}{2\Delta v_D}} \quad \text{für } \varphi_v = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta v_D} & \text{für } |v - v_{12}| \leq \Delta v_D \\ 0 & \text{für } |v - v_{12}| > \Delta v_D \end{cases} \quad b) \end{aligned} \quad (6)$$

(Δv_D ist die Dopplerbreite der Profilfunktion des Absorptionskoeffizienten).

Für große optische Tiefe, die bei $L_y - \alpha$ angenommen wird, geht b) in a) über. Außerdem gilt auch

$$F_{em}(r_0)_{L_y - \alpha} = \frac{2 h \nu_{12}^3}{c^2} \left(\frac{g_2 N_1(r_0)}{g_1 N_2(r_0)} - 1 \right)^{-1} \quad (7)$$

und damit

$$\frac{g_1 N_2(r)}{g_2 N_1(r)} = \frac{1 - \frac{\tau(r)}{\tau(\infty)}}{\frac{g_2 N_1(r_0)}{g_1 N_2(r_0)} - \frac{\tau(r)}{\tau(\infty)}} \quad (8)$$

Beachtet man, daß $g_2 N_1(r_0) / g_1 N_2(r_0) \gg 1$ so wird

$$N_2(r) = N_1(r) \cdot \frac{N_2(r_0)}{N_1(r_0)} \cdot \left(1 - \frac{\tau(r)}{\tau(\infty)} \right) \quad (9)$$

und mit der Näherung $N_1 \approx N$ schließlich

$$N_2(r) = \frac{N(r)}{N(r_0)} \cdot N_2(r_0) \cdot \left(1 - \frac{\tau(r)}{\tau(\infty)} \right) \quad (10)$$

Für die spezielle Dichteverteilung

$$N = N(R) \left(\frac{R}{r} \right)^n \quad (11)$$

ergibt sich dann

$$N_L(r) = N_L(r_0) \frac{r_0^{2n+1}}{r^{2n+1}} \quad (12)$$

4.1.2 Die Ergiebigkeit

Mit $N_2(r)$ kann man dann auch die Ergiebigkeit für die Balmerlinien berechnen, und zwar

a) für kohärente Streuung

$$S_\nu = J_\nu = F_{em}(\nu_0)_{\text{Balmer}} \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{h\nu_{2k}}{c} \cdot B_{2k} \cdot \varphi_\nu \int_r^\infty N_2(r) \frac{r_0^2}{r^2} dr}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{h\nu_{2k}}{c} \cdot B_{2k} \cdot \varphi_\nu \cdot \int_{r_0}^\infty N_2(r) \frac{r_0^2}{r^2} dr} \quad (1)$$

b) für inkohärente Streuung

$$S_\nu = \int_0^\infty J_\nu \cdot \varphi_\nu \, d\nu \quad (2)$$

Letzteres gibt für $\varphi_\nu = \delta(\nu - \nu_{2k})$ eine sehr bequeme Näherung

$$S'_\nu = F_{em}(\nu_0)_{\text{Balmer}} \cdot \frac{\int_r^\infty N_2(r) \frac{r_0^2}{r^2} dr}{\int_{r_0}^\infty N_2(r) \frac{r_0^2}{r^2} dr} \quad (3)$$

und speziell für die Dichteverteilung $N \sim r^{-n}$

$$S'_\nu = F_{em}(\nu_0)_{\text{Balmer}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2n+2} \quad (4)$$

Mit 4.1.1.(12) und 3.(4), (5) wird

$$\mathcal{L}_\nu = \frac{r_0^{2n}}{r^{2n+1}} \cdot \tau_0 \cdot \sqrt{\pi} \, \Delta\nu_0 \, \varphi_\nu \quad (5)$$

und damit schließlich

$$x_v \cdot S_v = F_{em_B}(r_0) \frac{r_0^{4n+2}}{r^{4n+3}} \cdot \tau_0 \sqrt{\pi} \Delta v_D \varphi_v \quad (6)$$

wobei

$$\tau_0 = \frac{2n+2}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_{r_0}^{\infty} \frac{x_v}{\varphi_v} \frac{r_0^2}{r^2} dr = \frac{h \nu_{ik}}{c} B_{2k} \frac{r_0 \cdot N_2(r_0)}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \quad (7)$$

4.2 Die H II - Zone

Um das Modell zu vereinfachen, wurden folgende Annahmen gemacht:

- 1) Der Stern ist ein Planckscher Strahler.
- 2) Die Umwandlung von Lymankontinuumsquanten in Balmerquanten ist vollständig.
- 3) Die Balmerquanten werden in der H II - Zone nicht absorbiert.
- 4) Die Elektronen haben eine Maxwellgeschwindigkeitsverteilung.
- 5) $N^+ = N^- = N$.
- 6) Die Ionisation erfolgt nur vom Grundzustand aus.

4.2.1 Der Strömgrenradius r_0

Nach Menzel [13] beträgt die Zahl der Rekombinationen in den Zustand i (pro Sekunde und cm^3): ($\nu_i := \nu_{i\infty} = \frac{R_y}{i^2}$)

$$\int_{\nu_i}^{\infty} F_{\lambda i} d\nu = N^+ \cdot N^- \cdot \frac{K}{T_e^{3/2}} \cdot \frac{\bar{g}}{i^3} e^{\frac{h\nu_i/k_B T_e}{}} \cdot [-E_i(-h\nu_i/k_B T_e)] \quad (1)$$

Dabei ist die Konstante

$$K = \frac{h^3}{(2\pi m_e k_B)^{3/2}} \cdot \frac{8\pi^2 \epsilon^2 R_y^2}{m_e c^2} \cdot \frac{2^4}{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \pi} = 3,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \cdot K^{3/2} \quad (2)$$

$\bar{g}$ ist ein gemittelter Gauntfaktor und die Funktion

$$-E_i(-h\nu_i/k_B T_e) := K_1(h\nu_i/k_B T_e) = \int_{h\nu_i/k_B T_e}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (3)$$

Die Zahl der gesamten Rekombinationen in der Hülle beträgt damit (bei Kugelsymmetrie):

$$4\pi \int_R^{r_0} N^+ N^- \cdot \frac{K}{T_e^{3/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{g}}{i^3} e^{\frac{h\nu_i/k_B T_e}{}} \cdot K_1(h\nu_i/k_B T_e) \cdot r^2 dr \quad (4)$$

(λ ist eine "Quantenzahl" des kontinuierlichen Zustandes entsprechend der Frequenz $\nu = R_y \cdot (\frac{1}{i^2} + \frac{1}{\lambda^2})$).

Im statistischen Gleichgewicht wird jede Rekombination durch eine Ionisation ausbalanciert, also

$$4\pi \int_R^{r_0} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{v_i}^{\infty} F_{xi} dv r^2 dv = 4\pi R^2 \int_{v_1}^{\infty} F_v^* \frac{dv}{h\nu} + 4\pi \int_R^{r_0} \int_{v_1}^{\infty} F_{x1} dv r^2 dv \quad (5)$$

L_C -Quanten vom Stern diffuse L_C -Quanten

Nähert man die Sternstrahlung durch eine Planckfunktion an (was natürlich gerade im Lymankontinuum nur eine grobe Näherung darstellt [16]), so ist

$$\int_{v_1}^{\infty} F_v^* \frac{dv}{h\nu} = \frac{2\pi}{c^2} \int_{v_1}^{\infty} \frac{v^2}{e^{h\nu/k_B T_e} - 1} dv \quad (6)$$

und man erhält damit (für konstantes T_e)

$$\int_R^{r_0} N^2 r^2 dr = R^2 \frac{\frac{2\pi}{c^2} \int_{v_1}^{\infty} \frac{v^2}{e^{h\nu/k_B T_e} - 1} dv}{\frac{\kappa}{T_e^{3/2}} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{g_i}{i^3} e^{h\nu_i/k_B T_e} \cdot K_1(h\nu_i/k_B T_e)} := R^2 \frac{f^*(T_e)}{f_e(T_e)} \quad (7)$$

mit der Funktion

$$f^*(T_e) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{k_B^3 T_e^3}{h^3} \int_{h\nu_1/k_B T_e}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 6,3 \cdot 10^{10} \cdot T_e^3 \int_{h\nu_1/k_B T_e}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-3}$$

Speziell für $N \sim \frac{1}{r^n}$ kann man die Integration der linken Seite von (7) leicht ausführen und erhält

$$r_0 = R \left(1 - \frac{2n-3}{R \cdot N^2(R)} \cdot \frac{f^*}{f_e} \right)^{-\frac{1}{2n-3}} \quad \text{für } n \neq 3/2 \quad (9)$$

$$\ln \frac{r_0}{R} = \frac{1}{R \cdot N^2(R)} \frac{f^*}{f_e} \quad \text{für } n = 3/2$$

Die Funktionen $f^*(T^*)$ und $f_e(T_e)$ und $f^*(T^*)/f_e(T_e) = \frac{1}{R^2} \cdot \int_R^{r_0} N^2(r) \cdot r^2 dr$ werden nachfolgend tabelliert; dabei sind die Werte für $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^{-h\nu_i/k_B T_e}}{\lambda^3} \cdot K_1(h\nu_i/k_B T_e)$ aus [17] entnommen.

$T^* [K]$	15000	18000	20000	25000
$f^* [cm^{-2} s^{-1}]$	$8,16 \cdot 10^{20}$	$5,88 \cdot 10^{21}$	$1,55 \cdot 10^{22}$	$9,9 \cdot 10^{22}$

$T_e [K]$	5000	10000	20000
$f_e [cm^3 s^{-1}]$	$4,15 \cdot 10^{-13}$	$2,53 \cdot 10^{-13}$	$1,47 \cdot 10^{-13}$

$f^*/f_e [cm^{-5}] :$

$T_e [K] \backslash T^*$	15000	20000	25000
5000	$1,97 \cdot 10^{33}$	$3,74 \cdot 10^{34}$	$2,38 \cdot 10^{35}$
10000	$3,22 \cdot 10^{33}$	$6,1 \cdot 10^{34}$	$3,92 \cdot 10^{35}$
20000	$5,55 \cdot 10^{33}$	$1,05 \cdot 10^{35}$	$6,75 \cdot 10^{35}$

Nach der Strömgrenschen Theorie erhält man [10]

$$\int_R^{r_0} N^2 r^2 \cdot dr = \frac{C_1}{x_1} \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 6,4 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2 \\ C_1 &= \frac{(2\pi m_e \cdot k_B T_e)^{3/2}}{h^3} \cdot 2 \frac{g_+}{g_-} e^{-h\nu_0/k_B T_e} \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^{1/2} \frac{R^2}{4} \\ &= 6,03 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3/2} \cdot R^2 \cdot T_e^{1/2} \cdot T_0 \cdot e^{-\frac{15,73 \cdot 10^4 \text{ K}}{T_0}} \end{aligned}$$

Die Werte von $C_1/R^2\alpha_1$ [cm^{-5}] sind:

T_e [K] \ T_0	15000	20000	25000
5000	$2,79 \cdot 10^{33}$	$5,12 \cdot 10^{34}$	$3,08 \cdot 10^{35}$
10000	$3,94 \cdot 10^{33}$	$7,23 \cdot 10^{34}$	$4,36 \cdot 10^{35}$
20000	$5,58 \cdot 10^{33}$	$1,02 \cdot 10^{35}$	$6,17 \cdot 10^{35}$

f^*/f_e und die entsprechende Größe $\frac{C_1}{R^2\alpha_1}$ der Strömgrenschen Theorie bestimmen durch den Ausdruck $\int_R^{r_0} N^2 \cdot r \, dr$ den Strömgrenradius r_0 .

Ein Vergleich der beiden letzten Tabellen zeigt, daß die Strömgrensche Theorie demnach für niedere Elektronen- und Sterntemperaturen etwas größere, für hohe Temperaturen aber etwas kleinere Strömgrenradien liefert, als obige Überlegung.

4.2.2 Eine Abschätzung der Besetzungszahlen g_k

Wenn alle Balmerquanten entweichen können und die Umwandlung der Lymankontinuumsquanten vollständig ist, so gilt

$$4\pi \sum_{k=3}^{\infty} \int_R^{r_0} N_k A_{k2} r^2 \, dr = 4\pi R^2 f^*(T_0) \quad (1)$$

Die Abweichung vom LTE wird mit Hilfe der Besetzungszahlen g_k beschrieben, die durch

$$N_k = b_k \cdot \frac{h^3}{(2\pi \cdot m_e \cdot k_B)^{3/2}} \cdot \frac{g_k}{2} \cdot \frac{e^{h\nu_k/k_B T_e}}{T_e^{3/2}} \cdot N^- \cdot N^+ \quad (2)$$

$$\left(\nu_k = R_y/k^2 ; \quad \nu_{k2} = R_y \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2} \right) \right)$$

definiert sind.

Mit

$$A_{k2} = \frac{g_2}{g_k} \cdot \frac{8\pi^2 e^2 \nu_{k2}^2}{m c^3} \cdot \frac{2^4}{3\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{1}{g_2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2}\right)^3} \cdot \frac{1}{k^3} \cdot \frac{1}{2^3} g_{k2} \quad (3)$$

wird mit 4.2.1.(2)

$$N_k \cdot A_{k2} = b_k \cdot \frac{e^{h\nu_k/k_B T_e}}{T_e^{3/2}} \cdot N^2 \cdot K \cdot \frac{g_{k2}}{(k^2-4) \cdot k} \quad (4)$$

also

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k \cdot \frac{e^{h\nu_k/k_B T_e}}{T_e^{3/2}} \cdot K \cdot \frac{g_{k2}}{(k^2-4) \cdot k} \cdot \int_R^{r_0} N^2 r^2 dr = R^2 f''(T_e) \quad (5)$$

Mit 4.2.1.(7) wird

$$K \cdot \sum_{k=3}^{\infty} b_k \cdot \frac{e^{h\nu_k/k_B T_e}}{T_e^{3/2}} \cdot \frac{g_{k2}}{(k^2-4) \cdot k} = f_e(T_e) \quad (6)$$

und damit schließlich

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k \cdot e^{h\nu_k/k_B T_e} \cdot \frac{g_{k2}}{(k^2-4) \cdot k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\bar{g}_{\sigma,k}}{k^3} e^{h\nu_k/k_B T_e} \cdot K_1(h\nu_k/k_B T_e) \quad (7)$$

Nach Griem [18] besteht eine Annäherung an die Boltzmannverteilung für $k \geq k_0$

mit

$$b_k^{\frac{13}{2}} = \frac{7,4 \cdot 10^{18}}{N^-} \left(\frac{T_e}{15,73 \cdot 10^4 K} \right)^{1/2} \quad (8)$$

Für einen Temperaturbereich von $T_e = 10^4$ bis $T_e = 2 \cdot 10^4$ K gilt demnach

N^- [cm ⁻³]	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}
k_0	16	13	9	7	5	4	3	3

Z. B. für $N = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ wäre also $b_k = 1$ für $k \geq 7$.

Interpoliert man jetzt linear zwischen b_3 und b_7 , also

$$b_4 = b_3 + \frac{1}{4} (1 - b_3)$$

$$b_5 = b_3 + \frac{1}{2} (1 - b_3)$$

$$b_6 = b_3 + \frac{3}{4} (1 - b_3)$$

so kann man aus (7) die b_k berechnen.

$$b_3 = \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\bar{g}_{0,k}}{k^3} e^{\frac{h\nu_k}{k_B T_e}} K_1\left(\frac{h\nu_k}{k_B T_e}\right) - \frac{1}{4} \frac{g_{42} \cdot e^{\frac{h\nu_4}{k_B T_e}}}{(4^3-4) \cdot 4} - \frac{1}{2} \frac{g_{52} \cdot e^{\frac{h\nu_5}{k_B T_e}}}{(5^3-4) \cdot 5} - \frac{3}{4} \frac{g_{62} \cdot e^{\frac{h\nu_6}{k_B T_e}}}{(6^3-4) \cdot 6} - \sum_{k=7}^{\infty} \frac{g_{k2} \cdot e^{\frac{h\nu_k}{k_B T_e}}}{(k^3-4) \cdot k}}{\frac{g_{32} \cdot e^{\frac{h\nu_3}{k_B T_e}}}{(3^3-4) \cdot 3} + \frac{3}{4} \frac{g_{42} \cdot e^{\frac{h\nu_4}{k_B T_e}}}{(4^3-4) \cdot 4} + \frac{1}{2} \frac{g_{52} \cdot e^{\frac{h\nu_5}{k_B T_e}}}{(5^3-4) \cdot 5} + \frac{1}{4} \frac{g_{62} \cdot e^{\frac{h\nu_6}{k_B T_e}}}{(6^3-4) \cdot 6}}$$

Mit den g_{k2} aus [19] erhält man dann

für $T_e = 10000$ K

$$b_3 = 0,12$$

$$b_4 = 0,34$$

$$b_5 = 0,56$$

$$b_6 = 0,78$$

für $T_e = 20000$ K

$$b_3 = 0,67$$

$$b_4 = 0,75$$

$$b_5 = 0,84$$

$$b_6 = 0,92$$

was einem Balmerdekrement

$$I_k/I_4 = 1,8:1:0,6:0,39:0,28 \quad \text{bzw.} \quad 4,5:1:0,4:0,21:0,12$$

entspricht.

4.2.3 Die Ergiebigkeit

Aus 3.(3) und (4) erhält man

$$\mathcal{X}_v^{\overline{\Pi}} \cdot \mathcal{S}_v^{\overline{\Pi}} = \frac{2 \hbar^3 v_{ik}}{c^2} \cdot \frac{\hbar v_{ik}}{c} \cdot B_{ik} \frac{g_i}{g_k} N_k^{\overline{\Pi}} \cdot \varphi_v^{\overline{\Pi}} \quad (1)$$

woraus mit 4.1.1.(2) und 4.2.2.(2)

$$\mathcal{X}_v^{\overline{\Pi}} \cdot \mathcal{S}_v^{\overline{\Pi}} = \frac{\hbar^3}{(2\pi m_e k_B)^{3/2}} \frac{g_k}{2} \frac{A_{ki}}{4\pi} \hbar v_{ik} \cdot b_k \frac{e}{T_e^{3/2}} \cdot N^{\overline{\Pi}} \cdot \varphi_v^{\overline{\Pi}} \quad (2)$$

folgt. Mit der Abkürzung

$$I_{em} := \frac{\hbar^3}{(2\pi m_e k_B)^{3/2}} \frac{g_k}{2} \frac{A_{ki}}{4\pi} \frac{\hbar v_{ik}}{\sqrt{\pi} \Delta v_0^{\overline{\Pi}}} b_k \frac{e}{T_e^{3/2}} \cdot N^{\overline{\Pi}}(R) \cdot R \quad (3)$$

erhält man schließlich

$$\mathcal{X}_v^{\overline{\Pi}} \cdot \mathcal{S}_v^{\overline{\Pi}} = I_{em} \cdot \frac{N^{\overline{\Pi}}(r)}{N^{\overline{\Pi}}(R)} \cdot \frac{1}{R} \cdot \varphi_v^{\overline{\Pi}} \cdot \sqrt{\pi} \Delta v_0^{\overline{\Pi}} \quad (4)$$

und speziell für $N \sim r^{-n}$

$$\mathcal{X}_v^{\overline{\Pi}} \cdot \mathcal{S}_v^{\overline{\Pi}} = I_{em} \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} \cdot \varphi_v^{\overline{\Pi}} \sqrt{\pi} \Delta v_0^{\overline{\Pi}} \quad (5)$$

4.2.4 Die Balmeremission

Der Strahlungsstrom $\pi F_{em_B}(\gamma_0)$ für eine Balmerlinie setzt sich aus der direkten Sternstrahlung und der Emission aus der H II - Region $\pi \cdot F'_{em_B}(\gamma_0)$ zusammen, also

$$F_{em_B}(\gamma_0) = F^* \frac{R^2}{\gamma_0^2} + F'_{em_B}(\gamma_0) \quad (1)$$

Im allgemeinen Fall ist $\pi F'_{em_B}(\gamma_0)$ auch noch abhängig vom Ort auf der Schale mit dem Radius r_0 . Bei Kugelsymmetrie (z. B. radiale Expansion) gilt aber für einen gegenüber dem Stern ruhenden Beobachter

$$F'_{em}(\gamma_0) = \frac{1}{4\gamma_0^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \int_{\sqrt{R^2-p^2}}^{\sqrt{\gamma_0^2-p^2}} x_v^u \bar{J}_v^u d\lambda \cdot p dp + \int_R^{\gamma_0} \int_{-\sqrt{\gamma_0^2-p^2}}^{\sqrt{\gamma_0^2-p^2}} x_v^u \bar{J}_v^u d\lambda \cdot p dp \right] d\alpha \quad (2)$$

Im folgenden wird (2) auch in allgemeineren Fällen zur genäherten Berechnung von $\int_v^I(\gamma)$ verwendet.

5. Spezielle Geschwindigkeitsfelder

Die folgenden Berechnungen beschränken sich auf den Dichteverlauf $N \sim r^{-n}$. Damit können bereits die Linienprofile der betrachteten Be-Sterne befriedigend angepaßt werden. Den Grund dafür dürfte der relativ gleichmäßige Massenausstoß dieser Objekte geben, wodurch ein stärkeres Abweichen von $N \sim r^{-2}$ nicht zu erwarten ist.

Um die folgenden Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, werden hier die benötigten Formeln aus den vorhergehenden Kapiteln zusammengestellt:

4.1.2. (5)

$$\mathcal{X}_v^I = \tau_0 \cdot \frac{r_0^{2n}}{r^{2n+1}} \cdot \varphi_v^I \cdot \sqrt{\pi} \Delta v_D^I \quad (1)$$

4.1.2. (6)

$$\mathcal{X}_v^I \cdot \mathcal{S}_v^I = F_{emB}(r_0) \cdot \tau_0 \cdot \frac{r_0^{4n+2}}{r^{4n+3}} \cdot \varphi_v^I \cdot \sqrt{\pi} \Delta v_D^I \quad (2)$$

4.2.3. (5)

$$\mathcal{X}_v^{II} \cdot \mathcal{S}_v^{II} = I_{em} \cdot \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} \cdot \varphi_v^{II} \cdot \sqrt{\pi} \Delta v_D^{II} \quad (3)$$

5.1 Berechnung von Linienprofilen für sehr schnell expandierende Hüllen

Bei konstanter Expansionsgeschwindigkeit v_0 der Hülle ist die Geschwindigkeitskomponente $v(p, \alpha, \lambda)$ in Richtung zum Beobachter

$$v(p, \alpha, \lambda) = v_0 \frac{\lambda}{r} = v_0 \frac{\lambda}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \quad (1)$$

und somit

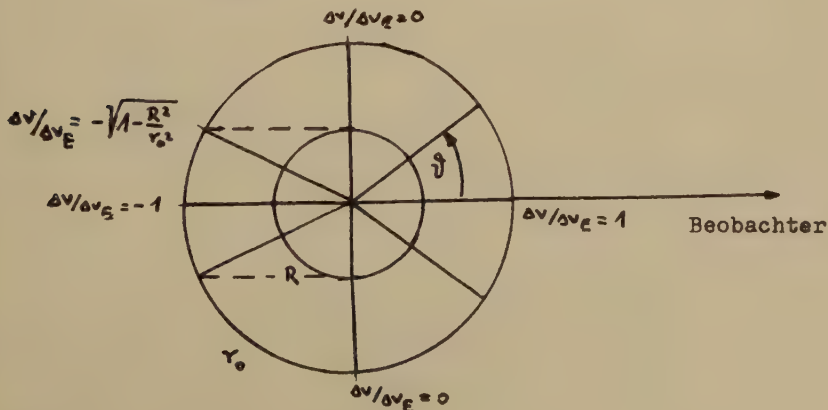
$$\varphi_v = \varphi^0 \left(v - v_{ik} \frac{v_0}{c} \frac{\lambda}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \right) \quad (2)$$

oder mit $\Delta v = v - v_{ik} ; \Delta v_E = \frac{v_0}{c} v_{ik}$ (3)

$$\varphi_v = \varphi^0 \left(v - \Delta v_E \cdot \frac{\lambda}{r} \right) \quad (4)$$

Führt man Kugelkoordinaten (den Pol zum Beobachter) ein, so sieht man gleich, daß Flächen gleicher Radialgeschwindigkeit Kegelflächen sind, deren Spitze im Sternmittelpunkt liegt; für den Öffnungswinkel ϑ gilt

$$\cos \vartheta = \frac{\Delta v}{\Delta v_E} \quad (5)$$



Ist die Expansionsgeschwindigkeit sehr groß, so kann man die Profilkfunktion des Absorptionskoeffizienten durch die δ -Funktion annähern.

$$\varphi_v = \delta(v - v_E \frac{\lambda}{r}) \quad (6)$$

Es wird sich später durch die numerische Rechnung erweisen, daß die Bedingung " v_0 sehr groß" schon für $\Delta v_E > 10 \Delta v_D$ erfüllt ist.

Wegen der allgemein gültigen Beziehung

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (7)$$

wobei die x_i die Nullstellen von $f(x)$ sind, wird

$$\varphi_v = \frac{\delta(\lambda - \lambda_0)}{\frac{\Delta v_E}{p} \left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^{3/2}} \quad (8)$$

mit

$$\lambda_0 = p \frac{\Delta v}{\Delta v_E} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}} \quad (9)$$

Damit ergibt sich

$$t(\lambda_a, \lambda_e) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} x_v^T d\lambda = \frac{\tau_0 \sqrt{\pi} \Delta v_0^T \cdot r_0^{2n}}{\frac{\Delta v_E}{p} \left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^{3/2}} \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \frac{\delta(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda^2 + p^2)^{\frac{2n+1}{2}}} d\lambda \quad (10)$$

$$= \frac{\alpha^2}{p^{2n}} \cdot \Theta(\lambda_0 - \lambda_a) \cdot \Theta(\lambda_e - \lambda_0) \quad (11)$$

mit

$$\alpha^2 := \tau_0 \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Delta v_0^T}{\Delta v_E} \cdot r_0^{2n} \left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^{n-1} \quad (12)$$

und

$$\int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \frac{x^I \delta^I}{F^*} \cdot e^{-t(\lambda, \lambda_e)} d\lambda = \frac{F_{emB}(\nu_0) \cdot \tau_0 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Delta \nu_0^I}{F^* \cdot \frac{\Delta \nu_E}{p} \left(1 - \frac{\Delta \nu^2}{\Delta \nu_E^2}\right)^{3/2}} \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \frac{\delta(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda^2 + p^2)^{\frac{4n+3}{2}}} e^{-t(\lambda, \lambda_e)} d\lambda \quad (13)$$

$$= d \cdot \frac{e^{-\frac{a^2}{p^2 n}} \Theta(\lambda_e - \lambda_0)}{p^{4n+2}} \quad (14)$$

mit

$$d = \frac{F_{emB}(\nu_0) \tau_0 \sqrt{\pi} \Delta \nu_0^I}{F^* \cdot \Delta \nu_E} \cdot \tau_0^{4n+2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta \nu^2}{\Delta \nu_E^2}\right)^{2n} \quad (15)$$

sowie

$$\int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \frac{x^II \delta^II}{F^*} d\lambda = \frac{I_{em} \sqrt{\pi} \Delta \nu_0^{II} R^{2n-1}}{F^* \cdot \frac{\Delta \nu_E}{p} \left(1 - \frac{\Delta \nu^2}{\Delta \nu_E^2}\right)^{3/2}} \int_{\lambda_a}^{\lambda_e} \frac{\delta(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda^2 + p^2)^n} d\lambda \quad (16)$$

$$= \frac{b}{p^{2n-1}} \Theta(\lambda_0 - \lambda_a) \cdot \Theta(\lambda_e - \lambda_0) \quad (17)$$

mit

$$b = \frac{I_{em} \sqrt{\pi} \Delta \nu_0^{II}}{F^* \cdot \Delta \nu_E} \left(1 - \frac{\Delta \nu^2}{\Delta \nu_E^2}\right)^{n-\frac{3}{2}} \cdot R^{2n-1} \quad (18)$$

Damit und mit 3.(9) - (14) erhält man ($r_1 \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned}
 i_v = \frac{2}{R^2} \left[\int_0^R \frac{I_v^*}{F^*} \cdot e^{-\frac{a^2}{p^{2n}} \Theta(\lambda_0 - \sqrt{r_0^2 - p^2})} \cdot p \, dp + b \int_0^R \frac{\Theta(\lambda_0 - \sqrt{r_0^2 - p^2}) \cdot \Theta(\sqrt{r_0^2 - p^2} - \lambda_0)}{p^{2n-1}} p \, dp \right. \\
 + d \int_0^R \frac{\Theta(\lambda_0 - \sqrt{r_0^2 - p^2}) \cdot e^{-\frac{a^2}{p^{2n}}}}{p^{4n+2}} p \, dp + d \int_R^{r_0} \frac{\Theta(-\sqrt{r_0^2 - p^2} - \lambda_0) \cdot e^{-\frac{a^2}{p^{2n}}}}{p^{4n+2}} p \, dp + \\
 + b \int_R^{r_0} \frac{\Theta(\lambda_0 + \sqrt{r_0^2 - p^2}) \cdot \Theta(\sqrt{r_0^2 - p^2} - \lambda_0)}{p^{2n-1}} p \, dp + d \int_R^{r_0} \frac{\Theta(\lambda_0 - \sqrt{r_0^2 - p^2}) e^{-\frac{a^2}{p^{2n}}}}{p^{4n+2}} p \, dp + \\
 \left. + d \int_{r_0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{p^{2n}}}}{p^{4n+2}} p \, dp \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

Man erhält demnach das Linienprofil für

1.) $\Delta v \leq 0$ (d.h. $\lambda_0 \leq 0$)

$$a) -\frac{\Delta v}{\Delta v_E} > \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}$$

$$i_v = \frac{I_v^*}{F^*} + \frac{(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2})^2}{n \cdot \tau'} \left[1 - \left(1 + \tau' \frac{r_0^{2n}}{R^{2n}} \left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2} \right)^{n-1} \right) e^{-\tau' \frac{r_0^{2n}}{R^{2n}} \left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2} \right)^{n-1}} \right] \quad (20)$$

mit

$$\tau' = \tau_0 \sqrt{\pi} \frac{\Delta v_D^I}{\Delta v_E} \quad (21)$$

$$b) -\frac{\Delta v}{\Delta v_E} < \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}$$

$$i_v = \frac{I_v^*}{F^*} + \frac{F_{em}^* r_0^2}{F^* R^2} + \left(1 + \frac{F_{em}^* r_0^2}{F^* R^2}\right) \frac{\left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^2}{n \cdot \tau'} \left[1 - \left(1 + \frac{\tau'}{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}\right) e^{-\frac{\tau'}{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}} \right] \quad (22)$$

wobei

$$\frac{F_{em}^* \cdot r_0^2}{F^* R^2} = \frac{2 \sqrt{\pi}}{2n-3} \frac{I_{em}}{F^*} \frac{\Delta v_0^{\frac{n}{2}}}{\Delta v_E} \left[\left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^{n-\frac{3}{2}} - \frac{R^{2n-3}}{r_0^{2n-3}} \right] \quad (n \neq 3/2) \quad (23)$$

bzw. für $n = 3/2$

$$\frac{F_{em}^* \cdot r_0^2}{F^* R^2} = 2 \sqrt{\pi} \frac{I_{em}}{F^*} \frac{\Delta v_0^{\frac{n}{2}}}{\Delta v_E} \ln \left(\frac{r_0}{R} \sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}} \right)$$

2.) $\Delta v \geq 0$

$$a) \frac{\Delta v}{\Delta v_E} < \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}$$

$$i_v = \frac{I_v^*}{F^*} + E \quad (24)$$

$$b) 1 > \frac{\Delta v}{\Delta v_E} > \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}$$

$$i_v = \frac{I_v^*}{F^*} \left[\left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right) \frac{r_0^2}{R^2} + \frac{2}{R^2} \int_0^R e^{-\frac{a^2}{p^{2n}}} p \, dp \right] + E \quad (25)$$

$$r_0 \sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}$$

wobei sowohl für a) als auch für b)

$$E = \frac{F'_{em} r_0^2}{F^* R^2} + \left(1 + \frac{F'_{em} r_0^2}{F^* R^2}\right) \frac{\left(1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}\right)^2}{n \cdot \tau'} \left[1 - \left(1 + \frac{\tau'}{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}\right) e^{-\frac{\tau'}{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}} \right] \quad (26)$$

und

$$\frac{F'_{em} r_0^2}{F^* R^2} = \frac{2 \sqrt{\pi}}{2n-3} \frac{I_{em}}{F^*} \frac{\Delta v_0^2}{\Delta v_E} \left(1 - \frac{R^{2n-3}}{r_0^{2n-3}}\right) \quad (n \neq 3/2) \quad (27)$$

bzw. für $n = 3/2$

$$\frac{F'_{em} r_0^2}{F^* R^2} = 2 \sqrt{\pi} \frac{I_{em}}{F^*} \frac{\Delta v_0^2}{\Delta v_E} \ln \frac{r_0}{R}$$

Das reine Emissionslinienprofil, also $\frac{I_v^*}{F^*} + \frac{F'_{em} \cdot r_0^2}{F^* \cdot R^2}$ verläuft

demnach auf der blauen Seite flach, d. h. mit konstanter Intensität; auf der roten Seite tritt dann (infolge der Abschattung durch den Stern) ein Abfall der Intensität ein, dessen Form durch den Dichteverlauf und die Ausdehnung der Hülle bestimmt wird (Parameter n und r_0/R). Bei zunehmender optischer Dicke der streuenden Hülle (also wachsendem τ_0) wölbt sich der flache Teil des Profils auf, und am blauen Ende der Linie erscheint eine Absorption. Letztere beginnt bei $\frac{\Delta v}{\Delta v_E} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_0^2}}$; sie ist aber im Punkt $\Delta v = \Delta v_E$ durch obige

Lösung mit der δ -Funktion nicht darstellbar.

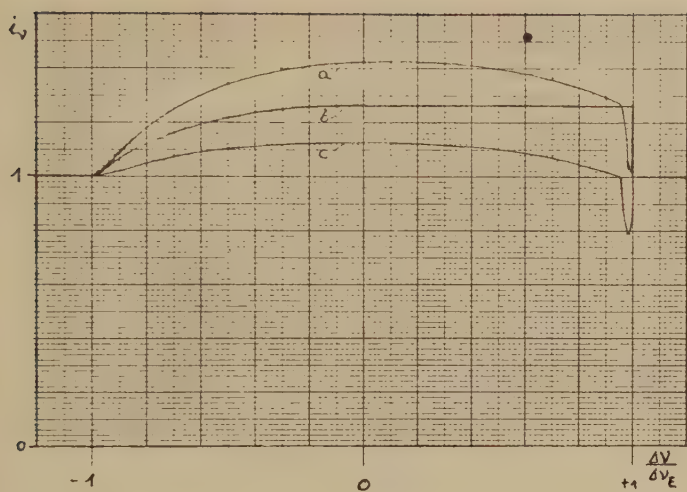


Abb. 1

Abb. 1 zeigt Profile für $n=2$; $r_0=4$; $\Delta v_F = 10 \Delta v_D$

- a) Emission + Streuung: $\tau_0=5$; $I_{em}=1$
- b) reine Emission: $\tau_0=0$; $I_{em}=1$
- c) reine Streuung: $\tau_0=5$; $I_{em}=0$

Abb. 2 zeigt den roten Flügel des Profils für reine Emission, normiert auf $i_v = 2$ für $\Delta v = 0$. Parameter sind $n = 0; 1; 2; 3$; und a) $r_0/R=3/2$ b) $\frac{r_0}{R}=5$.

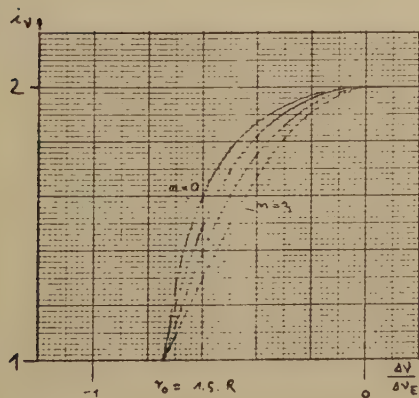


Abb. 2a

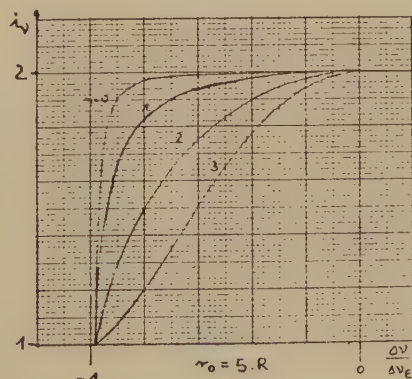


Abb. 2b

5.2 Berechnung der Flanken von Emissionslinien sehr schnell rotierender Hüllen

Für die Beschreibung der Rotation der Hülle wird das folgende Geschwindigkeitsfeld angenommen

$$v_{\text{rot}} = v_{0\text{rot}} \cdot \sin \vartheta' \left(\frac{R}{r} \right)^m \quad (1)$$

(ϑ' wird von der Rotationsachse aus gemessen).

Es werden also in sich starr rotierende Kugelschalen betrachtet, deren Rotationsgeschwindigkeit proportional $\left(\frac{R}{r} \right)^m$ abnimmt.

Sei die Neigung der Rotationsachse gegen die Beobachtungsrichtung gleich i , so erhält man für die Geschwindigkeitskomponente in Richtung zum Beobachter

$$v = v_{0\text{rot}} \cdot \sin i \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^m \cdot \frac{p}{r} \sin \alpha \quad (2)$$

Mit

$$\begin{aligned} \Delta v &= v - v_{ik} \\ \Delta v_H &= v_{ik} \frac{v_{0\text{rot}}}{c} \sin i \end{aligned} \quad (3)$$

erhält man für die Profilfunktion

$$\varphi_v = \varphi^0 \left(\Delta v - \Delta v_H \frac{R^m \cdot p \cdot \sin \alpha}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{m+1}{2}}} \right) \quad (4)$$

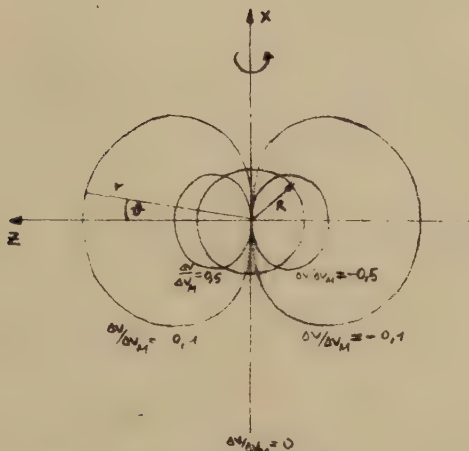
Geht man auf Kugelkoordinaten mit dem Pol bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ über, so erhält man für Flächen gleicher Radialgeschwindigkeit folgende Darstellung

$$\left(\frac{R}{r} \right)^m \cos \vartheta = \frac{\Delta v}{\Delta v_H} \quad (5)$$

Abbildung 1 zeigt für $m=2$ einen Schnitt durch die Flächen

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_M} = \pm 0,1 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta v}{\Delta v_M} = \pm 0,5.$$

Beobachtungsrichtung ist die Y-Achse. Die X-Y Ebene entspricht der Fläche $\Delta v = 0$ (Die Hülle rotiert um die X-Achse.)



$$\text{Abb. 1: } \frac{\Delta v}{\Delta v_M} = \cos \vartheta \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

Die durch (5) beschriebenen Flächen sind rotations-symmetrisch, berühren sich und die X-Y Ebene im Ursprung und schneiden die Z-Achse bei $z = \pm R \cdot \left(\left| \frac{\Delta v}{\Delta v_M} \right| \right)^{-1/m}$ (+ gilt für $\Delta v > 0$, - für $\Delta v < 0$).

Für $m=1$ sind es Kugelflächen mit dem Mittelpunkt

$$\left(0, 0, \frac{1}{2} R \frac{\Delta v_M}{\Delta v} \right) \text{ und dem Radius } \varrho = \frac{1}{2} R \cdot \left| \frac{\Delta v_M}{\Delta v} \right|$$

Ein durch (5) begrenztes Volumen strahlt pro Sekunde die Energie

$$E(\Delta v) = \int_{\Delta v}^{\Delta v_M} \left[\iiint \mathcal{L}_v^{\bar{r}} S_v^{\bar{r}} d\mathcal{V} \right] d\Delta v' = R^2 \pi F^* \int_{\Delta v}^{\Delta v_M} i_v d\Delta v' \quad (6)$$

in Richtung zum Beobachter.

Es ist also

$$R^2 \pi F^* i_v = - \frac{dE}{d\Delta v} = \frac{d}{d\Delta v} \int_{\Delta v}^{\Delta v_M} \left[\iiint I_{em} \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} \cdot \varphi_v \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Delta v_0^{\bar{r}} d\mathcal{V} \right] d\Delta v' \quad (7)$$

und mit der δ -Funktion als Profilfunktion

$$R^2 \pi F^* i_v = - I_{em} \sqrt{\pi} \cdot \Delta v_0 \cdot \frac{d}{d\Delta v} \int_{\Delta v}^{\Delta v_M} \iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} \cdot \delta\left(\Delta v' - \Delta v_M \left(\frac{R}{r}\right)^m \cos^2 \vartheta'\right) d\mathcal{V} d\Delta v' \quad (8)$$

Das dreidimensionale Integrationsgebiet ist, wenn man von der Abschattung durch den Stern absieht, einmal von der Sternoberfläche, andererseits durch die Fläche $\Delta v = \Delta v_M \left(\frac{R}{r}\right)^m \cos^2 \vartheta$ begrenzt.

Somit ist

$$\Delta v_M - \Delta v_M \left(\frac{R}{r_1}\right)^m \cos^2 \vartheta' \geq 0$$

$$\Delta v - \Delta v_M \left(\frac{R}{r_1}\right)^m \cos^2 \vartheta' \leq 0 \quad (9)$$

Die letzte Ungleichung gilt, da ja

$$\Delta v_M \left(\frac{R}{r_1}\right)^m \cos^2 \vartheta' = \Delta v'$$

mit $\Delta v' \geq \Delta v$ ist. Somit wird

$$i_v = - \frac{I_{em} \sqrt{\pi} \Delta v_0}{F^* R^2 \pi} \cdot \frac{d}{d\Delta v} \iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} d\mathcal{V} \quad (10)$$

Das Raumintegral ist, wenn man die Abschätzung durch den Stern nicht berücksichtigt, leicht zu lösen. Da für $\frac{\Delta v}{\Delta v_M} \leq \left(\frac{R}{r_0}\right)^m$ die Kugel mit dem Radius r_0 eine Grenze für das Integrationsgebiet wird, muß man zwei Fälle unterscheiden:

$$1.) \quad \frac{\Delta v}{\Delta v_M} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^m \quad (3-2n+m \neq 0)$$

$$\iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} dV = 2\pi \int_0^{\arccos \frac{\Delta v}{\Delta v_M}} \sin \vartheta d\vartheta \int_R^{\frac{R \cdot (\frac{\Delta v_M}{\Delta v} \cos \vartheta)^{\frac{1}{m}}}{}} \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} r^2 dr \quad (11)$$

$$= \frac{2\pi \cdot R^2}{3-2n} \left(\frac{3-2n}{3-2n+m} \frac{\Delta v}{\Delta v_M} + \frac{m}{3-2n+m} \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_M}\right)^{-\frac{3-2n}{m}} - 1 \right) \quad (12)$$

bzw. für $3-2n+m = 0$

$$\iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} dV = 2\pi \cdot R^2 \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_M} \ln \frac{\Delta v}{\Delta v_M} + 1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_M} \right) \quad (13)$$

Daraus folgt für die Intensitätsverteilung in der Linie

$$i_v = \frac{2\sqrt{\pi} \Delta v_0 I_{em}}{(3+m-2n) \Delta v_M F^*} \left(\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_M}\right)^{-\frac{3+m-2n}{m}} - 1 \right) \quad (14)$$

bzw. für $3-2n+m = 0$

$$i_v = \frac{2\sqrt{\pi} \Delta v_0 I_{em}}{\Delta v_M F^*} \cdot \ln \frac{\Delta v_M}{\Delta v} \quad (15)$$

$$2.) 0 \leq \frac{\Delta v}{\Delta v_M} \leq \left(\frac{R}{r_0}\right)^m ; \quad 3-2n+m \neq 0$$

$$\begin{aligned} \iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} d\vartheta &= 2\pi R^{2n-1} \int_0^{\arccos\left[\frac{\Delta v}{\Delta v_M} \left(\frac{r_0}{R}\right)^m\right]} \sin \vartheta d\vartheta \int_R^{r_0} r^{2-2n} dr + \int_{\arccos\left[\frac{\Delta v}{\Delta v_M} \left(\frac{r_0}{R}\right)^m\right]}^{\arccos \frac{\Delta v}{\Delta v_M}} \sin \vartheta d\vartheta \int_R^{R\left(\frac{\Delta v_M}{\Delta v} \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{m}}} r^{2-2n} dr \\ &= \frac{2\pi R^2}{3-2n} \left\{ \frac{3-2n}{3+m-2n} \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{3+m-2n} \right] \frac{\Delta v}{\Delta v_M} - \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{3-2n} \right] \right\} \end{aligned}$$

bzw. für $3-2n+m = 0$

$$\iiint \frac{R^{2n-1}}{r^{2n}} d\vartheta = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{r_0} - \frac{\Delta v}{\Delta v_M} \ln \frac{r_0}{R} \right) \quad (18)$$

Für die Intensität der Linie erhält man dann

$$i_\nu = \frac{2\sqrt{\pi}}{3+m-2n} \frac{\Delta v_0}{\Delta v_M} \frac{I_{em}}{F^*} \left[\left(\frac{r_0}{R}\right)^{3-2n+m} - 1 \right] \quad (3-2n+m \neq 0) \quad (19)$$

bzw. für $3-2n+m = 0$

$$i_\nu = 2\sqrt{\pi} \frac{\Delta v_0}{\Delta v_M} \frac{I_{em}}{F^*} \ln \frac{r_0}{R} \quad (20)$$

Für $\Delta v < 0$ ist das Profil symmetrisch zu ergänzen.

Da die Abschattung durch den Stern nicht berücksichtigt wurde, liefern die Gleichungen (14) bzw. (19) etwas zu große Intensitäten. Die Näherung läßt sich noch verbessern, wenn man die Abschattung durch einen Korrekturfaktor B berücksichtigt, der sich auf folgende Weise berechnet:

Von dem emittierenden Volumen $\frac{4}{3}\pi(\tau_{eff}^3 - R^3)$ geht für den Beobachter näherungsweise das Volumen $R^2\pi(\tau_{eff} - R)$ verloren. Somit erhält man

$$B = 1 - \frac{3}{4} \frac{\frac{r_{eff}}{R} - 1}{\frac{r_{eff}^3}{R^3} - 1} \quad (21)$$

Dabei ist für $n = 0$ der effektive Hüllradius $r_{eff} = r_0$ und im allgemeinen Fall

$$\frac{4\pi}{3} (r_{eff}^3 - R^3) = 4\pi R^{2n} \int_R^{r_0} \frac{r^2}{r^{2n}} dr \quad (22)$$

also

$$\frac{r_{eff}}{R} = \left[1 + \frac{3}{2n-3} \left(1 - \frac{R^{2n-3}}{r_0^{2n-3}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (n \neq 3/2) \quad (23)$$

bzw. für $n = 3/2$

$$\frac{r_{eff}}{R} = \left[1 + 3 \ln \frac{r_0}{R} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

Wie die numerische Rechnung zeigen wird, ist die obige Darstellung (19) für die Flügel $(|\frac{\Delta v}{\Delta v_m}| > (\frac{R}{r_0})^m)$ gut, versagt aber in der Linienmitte, da hier die Selbstabschattung besonders zum Tragen kommt.

Es ist bemerkenswert, daß aus einem Linienprofil die Parameter r_0 , n und m nicht getrennt ermittelt werden können. Die Parameterkombination $(\frac{R}{r_0})^m = a$ mit der zusätzlichen Bedingung $\frac{3-2n+m}{m} = b$ liefert für gegebenes a und b identische Profile.

5.3 Numerische Berechnung von Emissionslinienprofilen

Die meisten Hüllensterne zeigen in der H_{α} Emission extrem breite Flügel, deren Entstehung noch weitgehend ungeklärt ist. Für eine Deutung durch Starkeffekt reichen meistens die Elektronendichten in den Hüllen nicht; deutet man die Flügel als entstanden durch Dopplereffekt, so ergeben sich Rotationsgeschwindigkeiten, die weit über der Stabilitätsgrenze des Sternes liegen. Schließlich kann man noch eine Erklärung in der Elektronenstreuung suchen, was allerdings auch zu keinem passenden Ergebnis führt.

Für die numerische Berechnung von Profilen wurde deshalb dieses strittige Problem zurückgestellt, und es wurden einfache Dopplerprofile für den Absorptionskoeffizienten verwendet.

Als Hauptproblem bei der numerischen Behandlung erwies sich die Rechenzeit. Immerhin handelt es sich im allgemeinen Fall um eine Volumenintegration, wobei der Integrand selbst noch ein Integral enthält. Es wurde deshalb auf die bezüglich der Konvergenzkontrolle günstigen Intervallschrittverfahren verzichtet und das Stützpunkte sparende Gaussverfahren verwendet. Dabei wurden für die einzelnen Integrationsgebiete Produktformeln entwickelt (s. dazu [21]), und zwar für $0 \leq p \leq R$ eine zweidimensionale Gaussformel, für $R < p < r_0$ eine zweidimensionale Gaussformel für den Kreisring und für $r_0 \leq p < \infty$ eine zweidimensionale Laguerreformel für den Kreisring.

Die Integrationen in Δ wurden durch eine eindimensionale Gauss- bzw. Laguerre-Quadraturformel ausgeführt.

Bei der Rechnung zeigte sich, daß bei unzureichender Stützstellenzahl für die Integrationsformeln die errechneten Profile wellig werden. Damit und mit den Ergebnissen von 5.1 und 5.2 kann die Konvergenz der Rechnung überprüft werden.

5.3.1 Emissionslinienprofile für expandierende Hüllen

Mit dem Dopplerprofil

$$\varphi^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_0} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0}\right)^2} \quad (1)$$

erhält man für radiale Expansion mit der Geschwindigkeit v_0

$$\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_0} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} - \frac{\Delta v_E}{\Delta v_0} \frac{\lambda}{\lambda_0 + \mu^2}\right)^2} \quad (2)$$

$$\text{mit } \Delta v_E = \frac{v_0}{c} v_{ik} \quad (3)$$

Der Beitrag, den die Profilfunktion bei der Integration über λ liefert, hat seinen größten Wert bei

$$\lambda_M = \frac{\Delta v}{\Delta v_E} \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{\Delta v_E^2}}} \quad (4)$$

und fällt für $\lambda \neq \lambda_M$ wieder ab. Dieser Abfall wird für große Δv_E unter Umständen sehr rasch, was sich ungünstig auf die numerische Integration auswirkt. Deshalb wurde die Profilfunktion an den Flügeln abgeschnitten, so daß

$$\varphi_v = 0 \quad \text{für} \quad e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} - \frac{\Delta v_E}{\Delta v_0} \frac{\lambda}{\lambda_0 + \mu^2}\right)^2} \leq \varepsilon \quad (5)$$

Somit erstreckt sich die Integration über λ von

$$\lambda_M = \mu \frac{\frac{\Delta v}{\Delta v_E} - \frac{\Delta v_0}{\Delta v_E} \sqrt{-\ln \varepsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_E} - \frac{\Delta v_0}{\Delta v_E} \sqrt{-\ln \varepsilon}\right)^2}} \quad (6)$$

bis

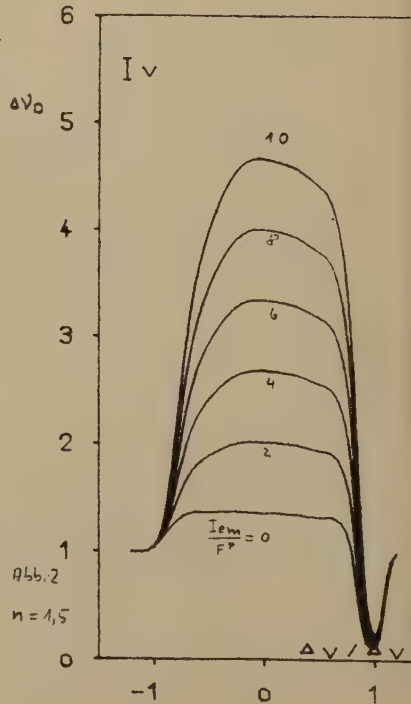
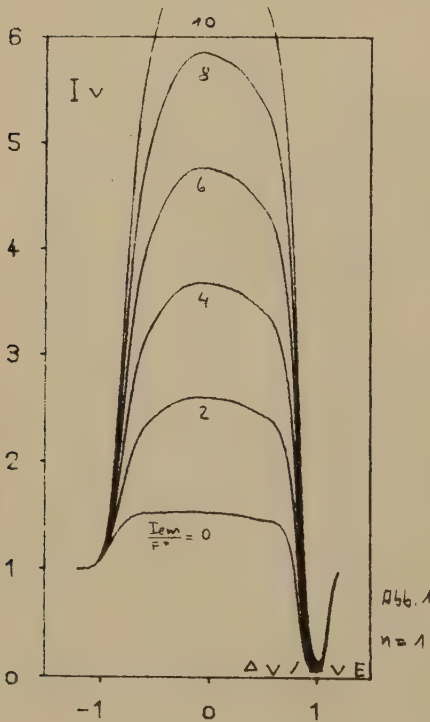
$$\Delta \sigma = \rho \frac{\frac{\Delta v}{\Delta v_E} + \frac{\Delta v_D}{\Delta v_E} \sqrt{-\ln \varepsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_E} + \frac{\Delta v_D}{\Delta v_E} \sqrt{-\ln \varepsilon} \right)^2}} \quad (7)$$

solange $\Delta \sigma \leq \Delta \mu$ und $\Delta \sigma \geq \Delta \sigma$.

Es zeigt sich, daß ε (natürlich in gewissen Grenzen) wohl das Konvergenzverhalten der Integration, nicht aber die Form der errechneten Linienprofile beeinflusst.

Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen Profile für die Parameter $r_0 = 2R$, $\tau_0 = 10$, $\Delta v_E = 10 \Delta v_D$ und $n = 1; 1,5; 2; 2,5$.

Für $\frac{I_{em}}{F^*}$ wurden die Werte 0; 2; ... bis 10 gewählt.



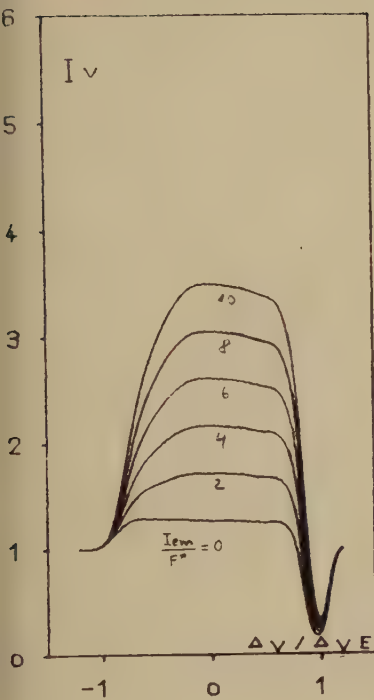


Abb. 3
 $n=2$

$$\begin{aligned} r_0 &= 2R \\ \tau_0 &= 10 \\ \Delta V_E &= 10 \Delta V_D \end{aligned}$$

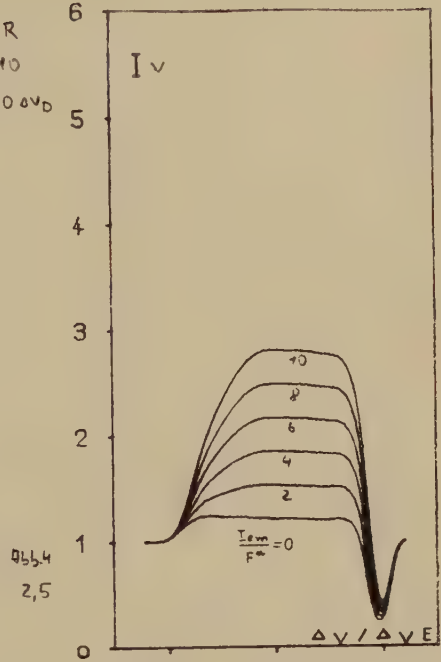


Abb. 4
 $2,5$

Die Abbildungen 5 bis 7 zeigen Profile für $r_0 = 4R$, $n = 2$, $\Delta V_E = 10 \Delta V_D$, $\frac{I_{em}}{F^*} = 0; 1; \dots 5$ und $\tau_0 = 0; 1; 5$. Die nach 5.1 (22, 24) berechneten Profile sind gestrichelt eingezeichnet.

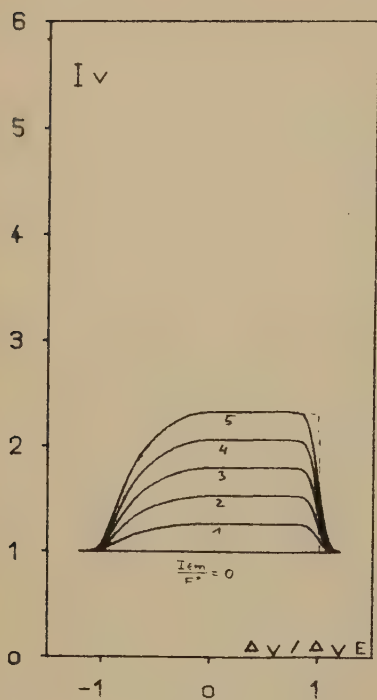


Abb. 5
 $\tau_0 = 0$

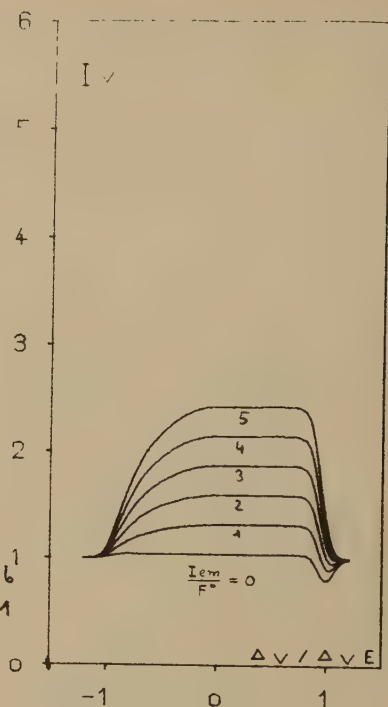


Abb. 6
 $\tau_0 = 1$

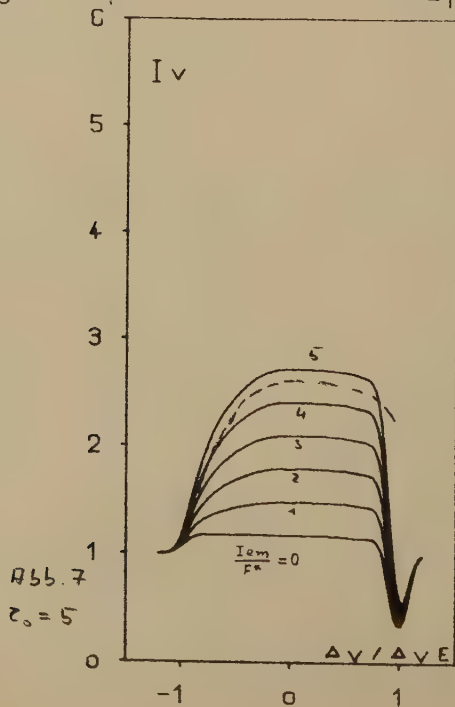


Abb. 7
 $\tau_0 = 5$

5.3.2 Emissionslinienprofile für rotierende Hüllen

Die Profilfunktion lautet hier

$$\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_0} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} - \frac{\Delta v_M}{\Delta v_0} \frac{R^m \cdot p}{(p^2 + \lambda^2)^{\frac{m+1}{2}}} \cdot \sin \alpha \right)^2} \quad (1)$$

$$\text{mit } \Delta v_M = v_{ik} \frac{v_{\text{rot}}}{c} \sin i \quad (2)$$

Den maximalen Beitrag für die Integration über λ erhält man für

$$\lambda_M = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_M}{\Delta v} \cdot R^m \cdot p \cdot \sin \alpha \right)^{\frac{2}{m+1}} - p^2} \quad (3)$$

Bei Beschneidung von φ_v entsprechend 5.3.1 erhält man z.B. für $\sin \alpha \geq 0$; $\lambda > 0$; $\Delta v > \sqrt{-\ln \epsilon}$

$$\lambda_M = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_M R^m p \cdot \sin \alpha}{\Delta v + \Delta v_0 \sqrt{-\ln \epsilon}} \right)^{\frac{2}{m+1}} - p^2} \quad (4)$$

und

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_M R^m p \cdot \sin \alpha}{\Delta v - \Delta v_0 \sqrt{-\ln \epsilon}} \right)^{\frac{2}{m+1}} - p^2} \quad (5)$$

Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen für $m = 1$; $r_o = 5R$; $n = 1,5$;
 $\Delta v_M = 20 \Delta v_D$ die Abhängigkeit der zentralen Absorption von
der optischen Tiefe der H I - Zone. Die Einsenkung für $\tau_o = 0$
entsteht durch die Selbstabschattung.

Man beachte auch, daß bereits ohne die Annahme einer Emissions-
zone, also allein durch Streuung ($I_{em} = 0$), eine typische
Hüllenemissionslinie, allerdings von geringer Intensität, ge-
bildet wird. In der Abbildung 1 ist auch gestrichelt das nach
5.2 berechnete Profil eingezeichnet.

Für die praktische Auswertung ist bemerkenswert, daß durch die
H I - Zone nur die zentrale Absorption, nicht aber die Form der
Emissionsflügel, beeinflußt wird. Letztere wird vielmehr durch
den Dichteverlauf bestimmt, wie die Abbildungen 5 bis 7 zeigen.
Der Abstand der beiden Emissionshälften wird durch r_o/R (oder
genauer durch $(r_o/R)^m$) bestimmt (vgl. Abb. 9): ein Ergebnis,
das schon nach der Rechnung in 5.2 zu erwarten war.

Schließlich sind in Abbildung 10 a u. b und 11 a u. b fast
identische Profile mit verschiedenen Parametern gegenüber-
gestellt (vgl. 5.2.(25)).

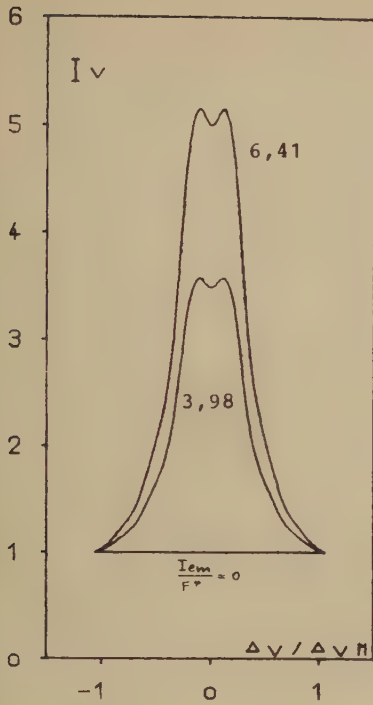


Abb. 1

$n_0 = 1$
 $r_c = 5R$
 $n = 1,5$
 $M = 20$

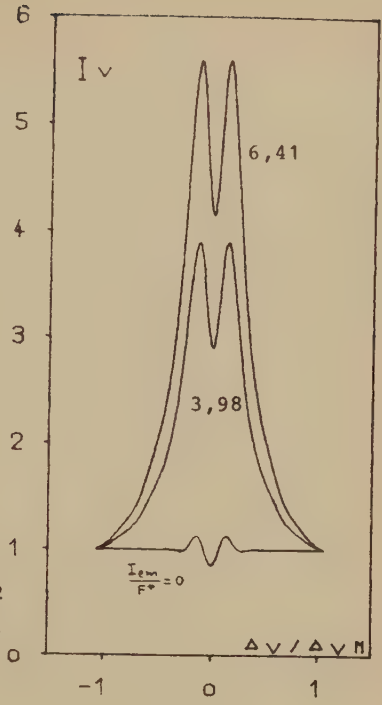


Abb. 2

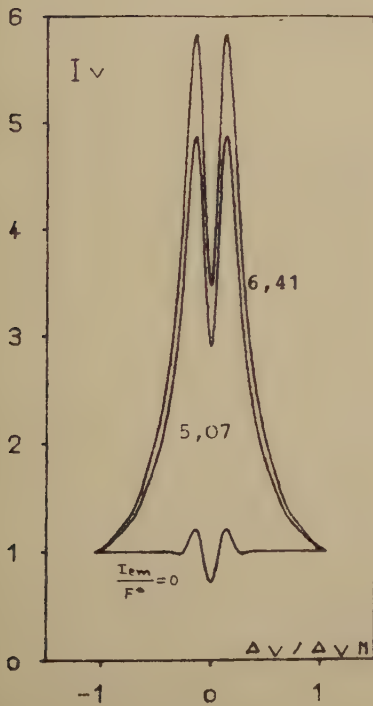


Abb. 3

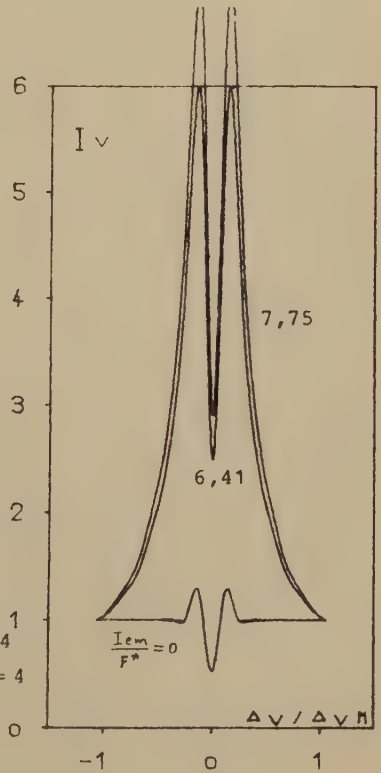


Abb. 4

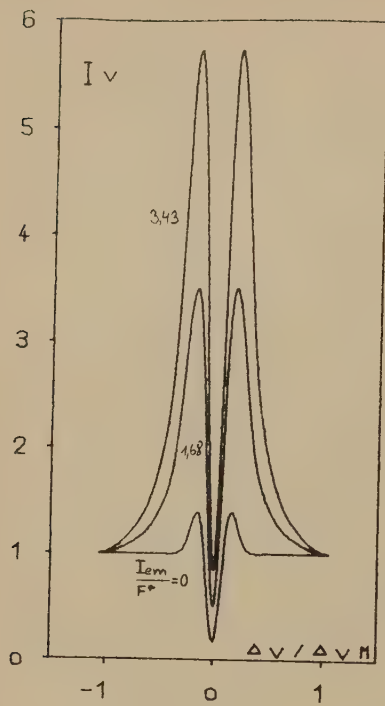


Abb. 5
 $n = 1$

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ r_0 &= 4R \\ \tau_0 &= 14,5 \\ \Delta v_M &= 20 \Delta v_D \end{aligned}$$

Abb. 6
 $n = 1,5$

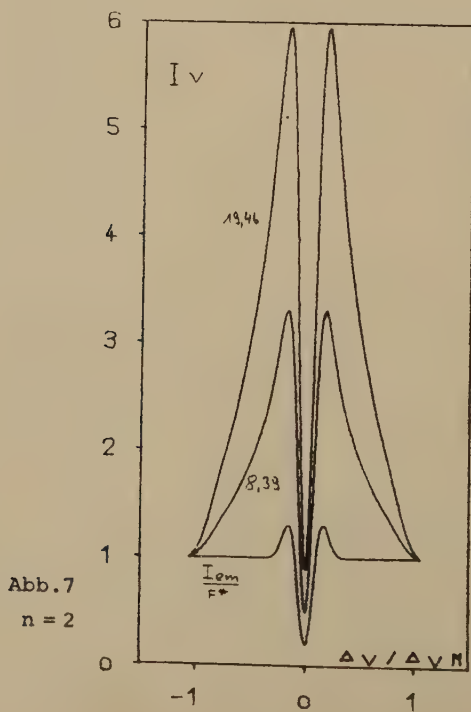
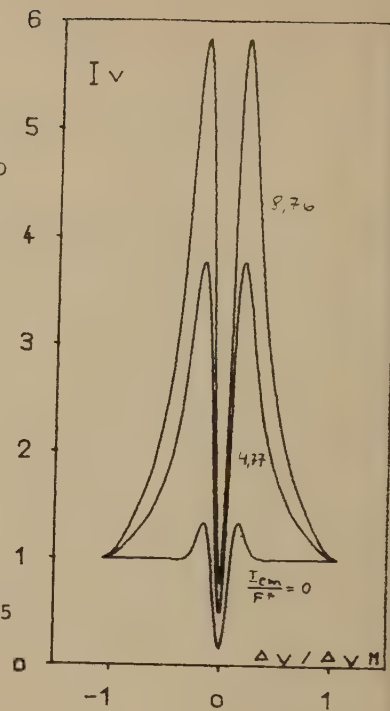


Abb. 7
 $n = 2$

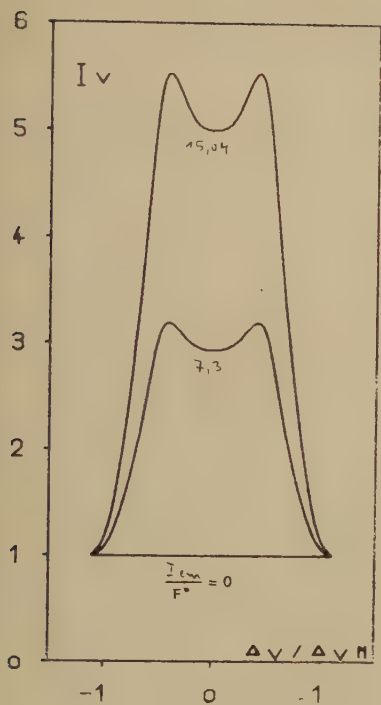


Abb. 8
 $\gamma_0 = 0$

$m = 1$
 $\gamma_0 = 2R$
 $\Delta V_M = 10 \text{ aV}_D$
 $n = 1.5$

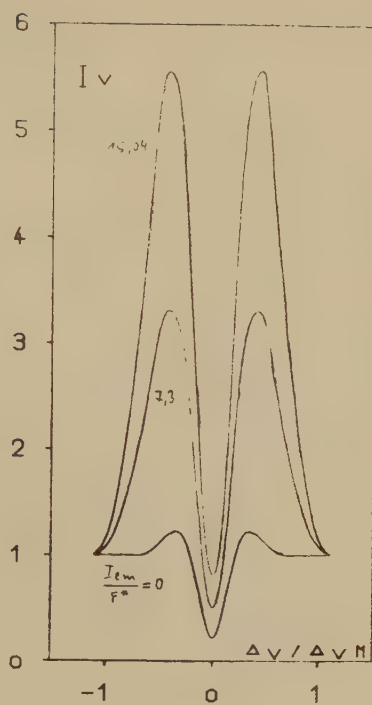


Abb. 9
 $\gamma_0 = 14.5$

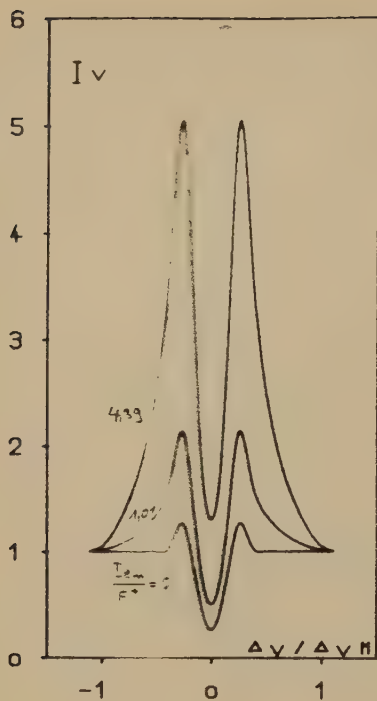


Abb. 10a
 $m = 1$
 $\gamma_0 = 4R$
 $n = 1$

$\tau_0 = 14.5$
 $\Delta V_M = 10 \Delta V_0$

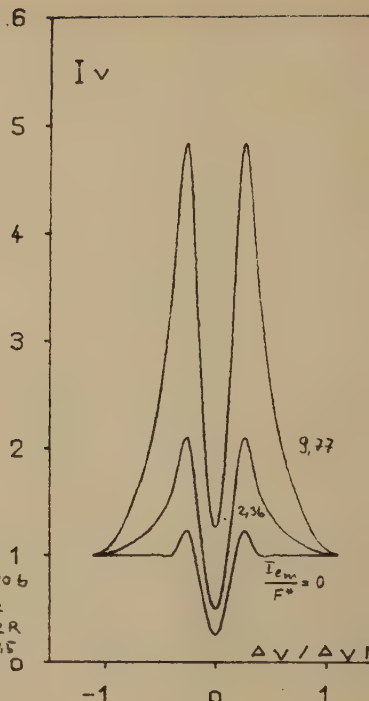


Abb. 10b
 $m = 2$
 $\gamma_0 = 2R$
 $n = 1.5$

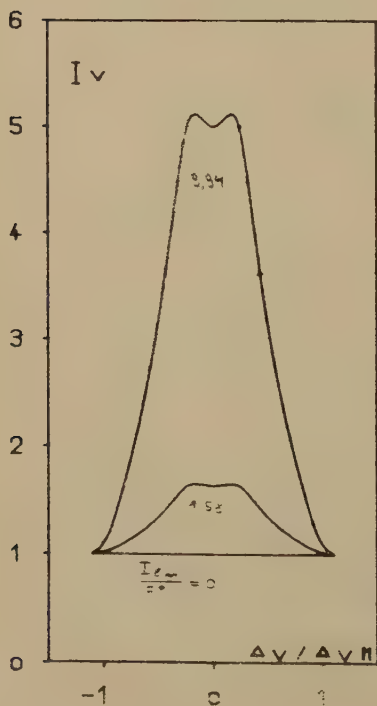


Abb. 11a
 $m = 1$
 $\gamma_0 = 4R$
 $n = 2$

$\tau_0 = 0$
 $\Delta V_M = 10 \Delta V_0$

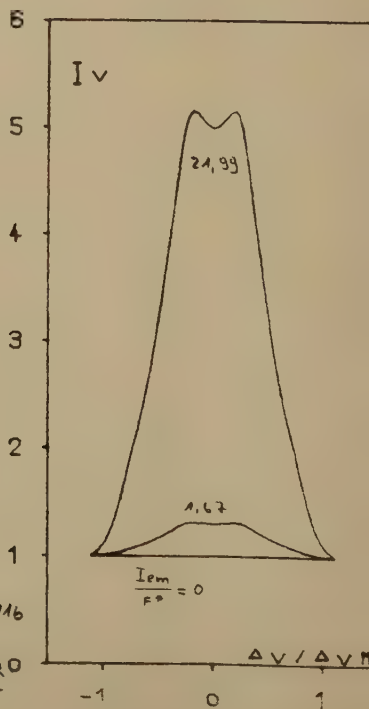


Abb. 11b
 $m = 2$
 $\gamma_0 = 2R$
 $n = 2.5$

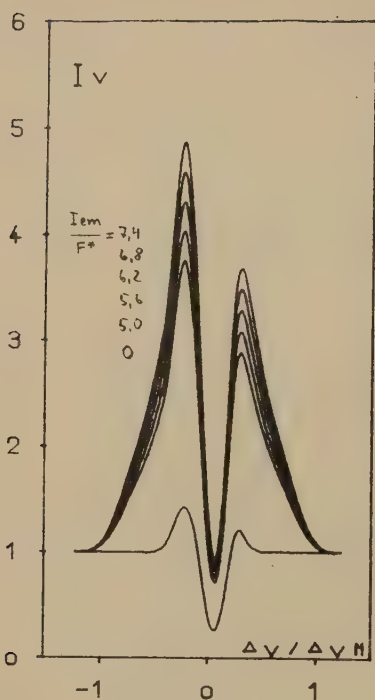
5.3.3 Emissionslinienprofile für rotierende Hüllen mit zusätzlicher Expansion

Berücksichtigt man zusätzlich zur Rotation noch Expansion, so erhält man die Profilfunktion

$$Y_v = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_0} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} - \frac{\Delta v_H}{\Delta v_0} \frac{R^m \rho \sin \alpha}{(r^2 + s^2)^{\frac{m+1}{2}}} - \frac{\Delta v_E}{\Delta v_0} \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \right)^2} \quad (1)$$

Für $\Delta v_E \ll \Delta v_H$ kann 5.3.2 (4) verwendet werden, und die numerische Behandlung erfolgt ähnlich wie bei 5.3.2.

Abbildung 1 zeigt, daß bereits eine geringe Expansionsgeschwindigkeit eine starke Asymmetrie der Linie bewirkt. Daß für $\tau_0 = 0$ (Abb.2) die Einsenkung auf der roten Seite liegt, somit also eine Kontraktion vortäuscht, mag auf den ersten Blick verblüffen. Der Effekt beruht darauf, daß sich der Teil der Hülle, der durch den Stern beschattet wird, bei Expansion vom Beobachter wegbewegt. Man kann also bei kleinen Einsenkungen in der Linienmitte nicht ohne weiteres eine Aussage über die Expansions- oder Kontraktionsgeschwindigkeit der rotierenden Hülle machen. Das zeigt der Vergleich von Abbildung 3a mit 3b.



$m=1$
 $n=2$
 $\Delta V_M = 1.9 \Delta V_0$
 $\tau_0 = 3.5 R$
 $\Delta V_E = 0.5 \Delta V_0$

Abb. 1
 $\tau_0 = 14.5$

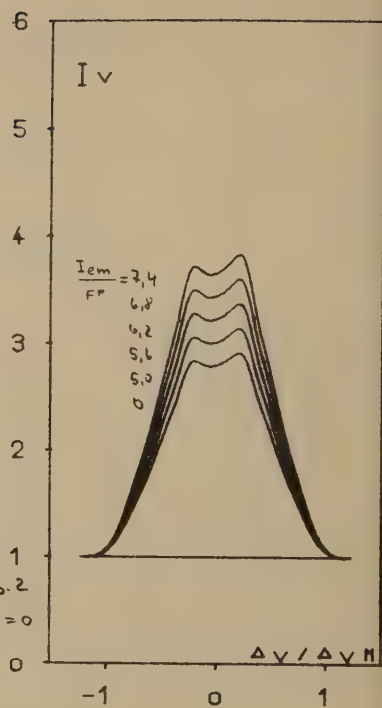
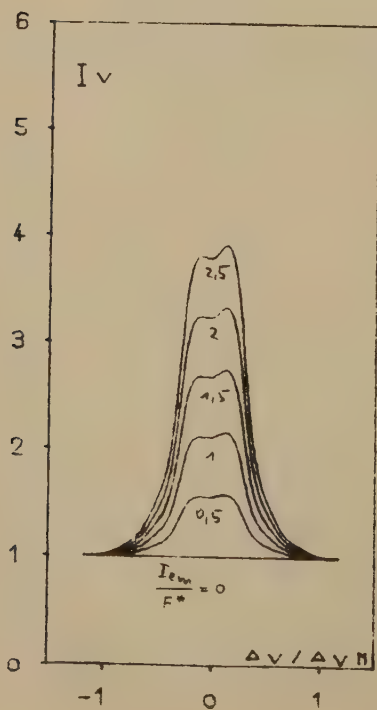


Abb. 2
 $\tau_0 = 0$



$m=1$
 $n=1.2$
 $\tau_0 = 4.8 R$
 $\Delta V_M = 2.0 \Delta V_0$
 $\Delta V_E = 0.5 \Delta V_0$

Abb. 3a
 $\tau_0 = 0$

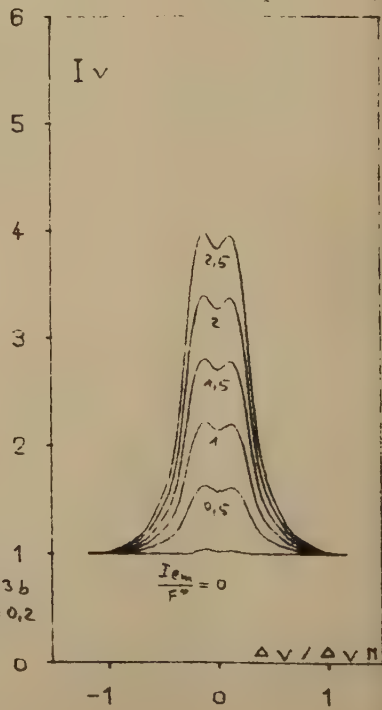


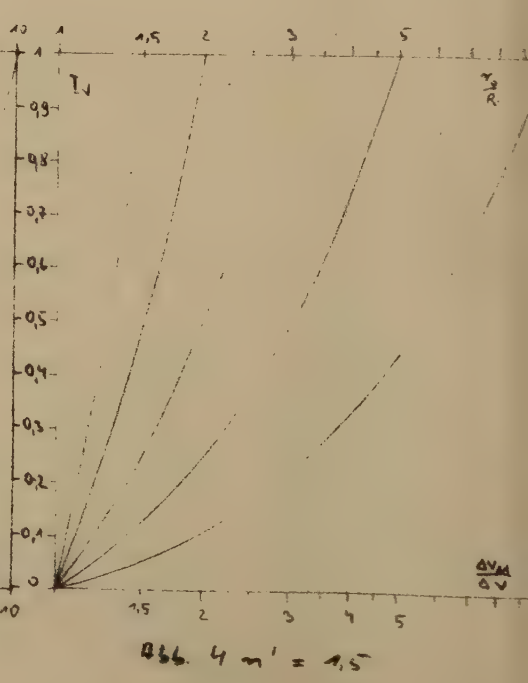
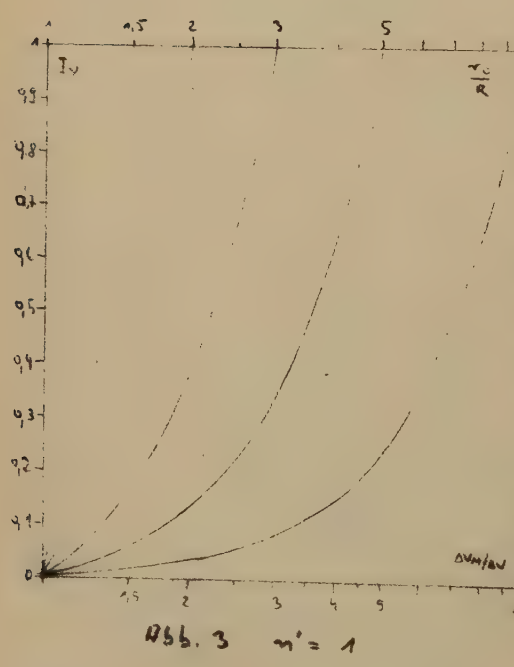
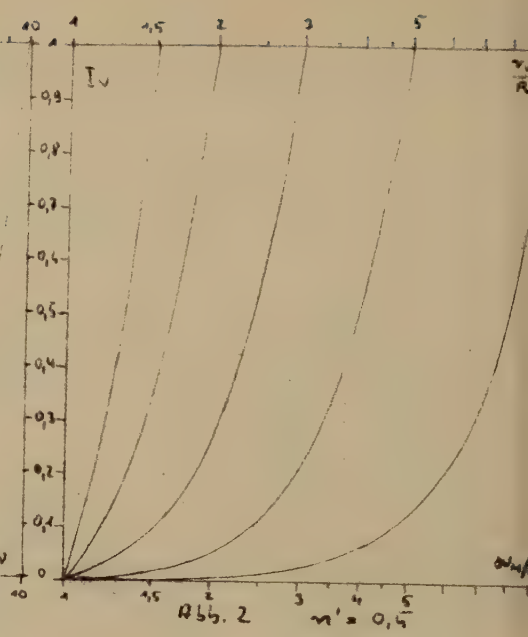
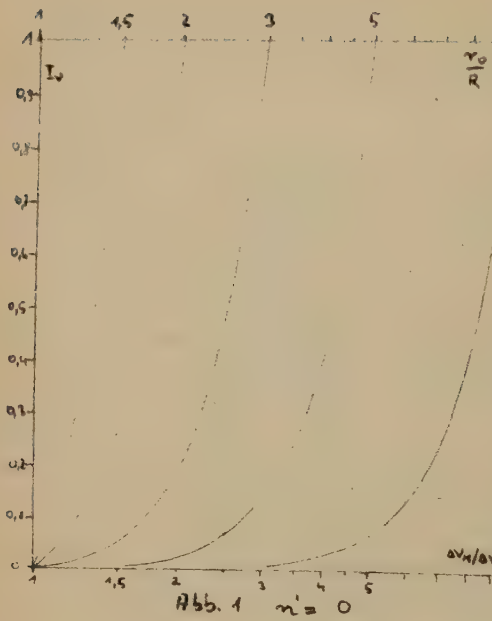
Abb. 3b
 $\tau_0 = 0.2$

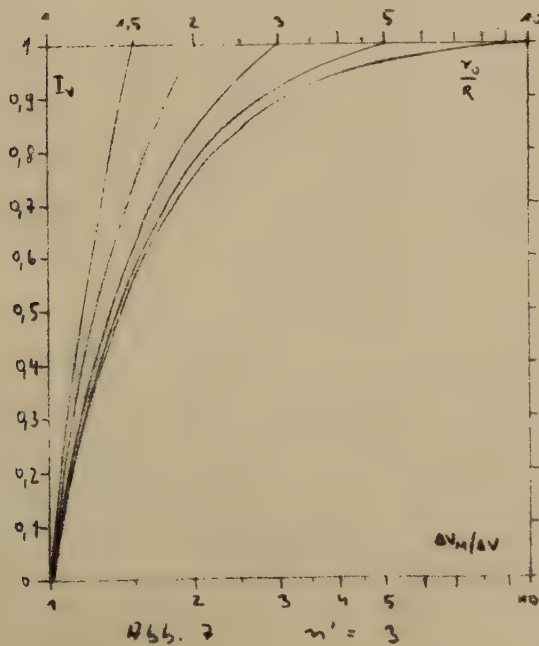
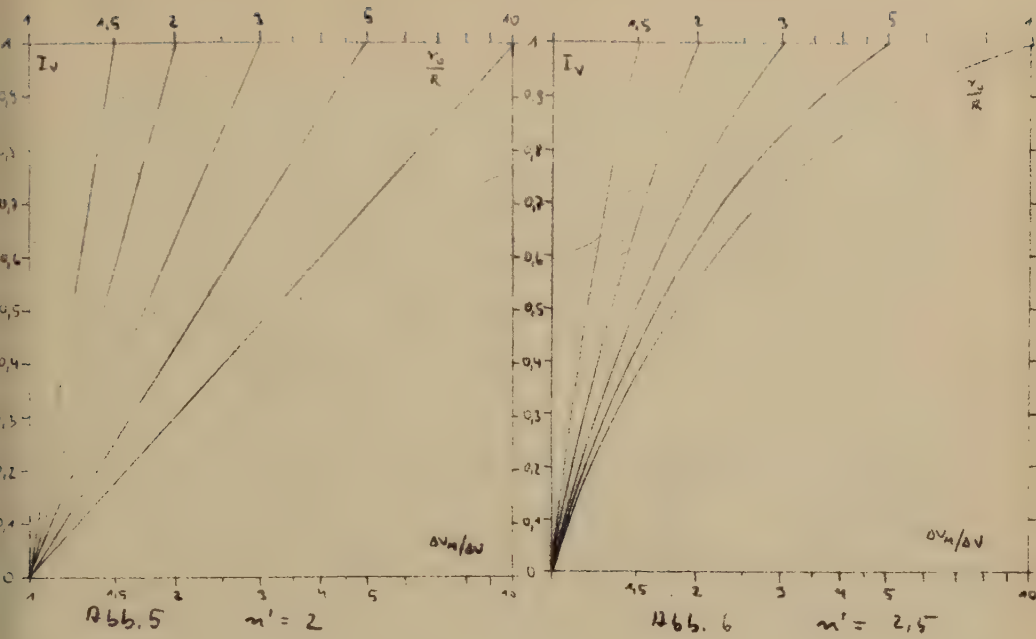
6. Ermittlung der die Hülle charakterisierenden Größen aus gemessenen Linienprofilen

Die bisherigen Ergebnisse sollen jetzt am Beispiel von Hüllensternen angewendet werden. Dazu werden als Beobachtungsmaterial die Messungen von Gray und Marlborough [22] herangezogen.

Zunächst wurden die Formeln 5.2 (14) bzw. (15) graphisch dargestellt. Es wurde dabei $m=1$ gesetzt, $i_v \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_M} = \frac{R}{r_0} \right) - 1$ auf 1 normiert und gegen $\ln \frac{\Delta v_M}{\Delta v}$ aufgetragen, mit n' und r_0/R als Parameter (Abb. 1 bis 7).

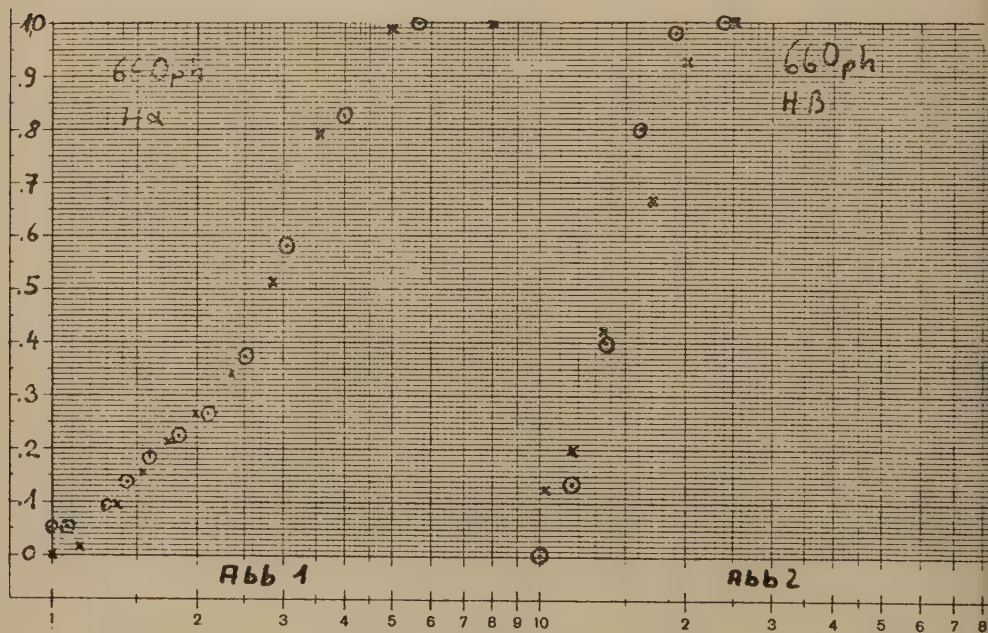
Da bei Hüllenspektren meist die Sternlinien auch sichtbar sind, kann man die Rotationsgeschwindigkeit des Sterns und somit Δv_M ermitteln. Trägt man nun die gemessene Intensität im obigen Maßstab ($i_{v_{Hax}} - 1 = 1$) gegen $\ln \frac{\Delta v_M}{\Delta v}$ auf, so kann man durch Vergleich mit den Abbildungen 1 bis 7 sofort $(r_0/R)^m$ und $n = n' \cdot m - \frac{3}{2}(m-1)$ ablesen.





6.1 66 Oph

66 Oph (HD 164284) rotiert mit $v_{\text{rot}} \sin i = 241 \text{ km/s}$ [22] und wird als B2Ve klassifiziert. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die $H\alpha$ und $H\beta$ Emission in der obigen Darstellung. Dabei beziehen sich die Kreuze auf den roten, die Kreise auf den blauen Linienflügel.



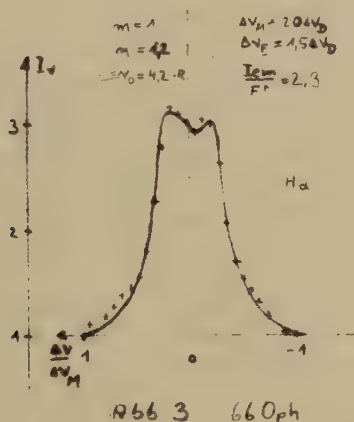
Aus dem Vergleich mit den Abbildungen 6. (1 - 7) erhält man die Werte

$$(r_0/R)^m = 4,2 \quad \text{und} \quad n' = 1,2 \quad \text{für } H\alpha$$

$$(r_0/R)^m = 2 \quad \text{und} \quad n' = 2 \quad \text{für } H\beta$$

Die verschiedenen Werte für H_α und H_β weisen darauf hin, daß die Hülle eine Schichtung der Entstehungsgebiete für die Balmerlinien aufweist, die in diesem groben Modell nicht berücksichtigt wurde. Die H_β Emissionszone liegt näher am Stern als die für H_α . Eine ähnliche Schichtung haben Dürbeck, Seitter und Kowatschew [23] auch bei γ Cas beobachtet. Der Grund dürfte wohl darin zu suchen sein, daß die Besetzungszahlen $b_k = b_k(r)$ ortsabhängig und nicht, wie im Modell angenommen wurde, konstant sind.

Die Abbildung 3 zeigt ein gerechnetes Profil für $m=1$; $n=1,2$; $r_0/R=4,2$ und eine Expansionsgeschwindigkeit von 18 km/s (für $v_{0\text{rot}} \cdot \sin i = 241$ km/s). Die Kreuze sind die gemessenen Werte [22].



In den äußeren Flügeln sieht man eine deutliche Differenz zwischen Rechnung und Messung. Berücksichtigt man die Ergebnisse aus der Messung der H_β Linie, wonach für $r < 2R$ $n'=2$ ist, so kann man die Flügel bei H_α noch besser anpassen. Die Abbildung 4 zeigt das (nach 5.2) berechnete Profil. Die Kreuze sind wieder die Meßwerte.

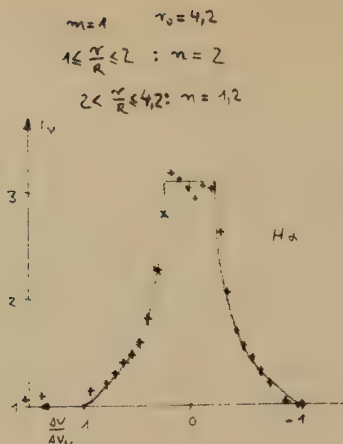


Abb 4 66 Oph

Die Werte für $H\beta$ sind allerdings (besonders in den Flügeln) verfälscht, da die Emission wesentlich schwächer ist als bei $H\alpha$ und dadurch die breite Stern(absorptions)-Linie nicht mehr vernachlässigbar ist. Abbildung 5 zeigt die gemessene Emissionslinie, wobei gestrichelt eine mögliche Lage der Absorptionslinie eingezeichnet ist. Dazu wurde das $H\beta$ Profil von δ Cet (B2IV) [26] nach der Methode von P.Wellmann [27] auf $v_{0, \gamma_0+} \sin i = 241 \text{ km/s}$ verbreitert.

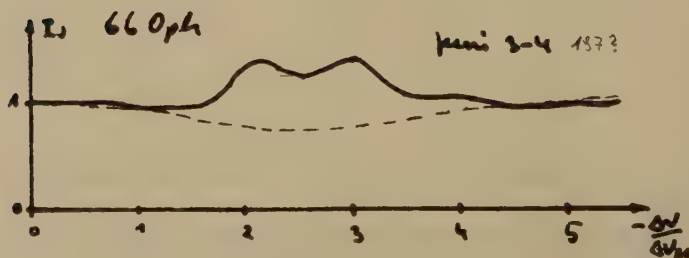


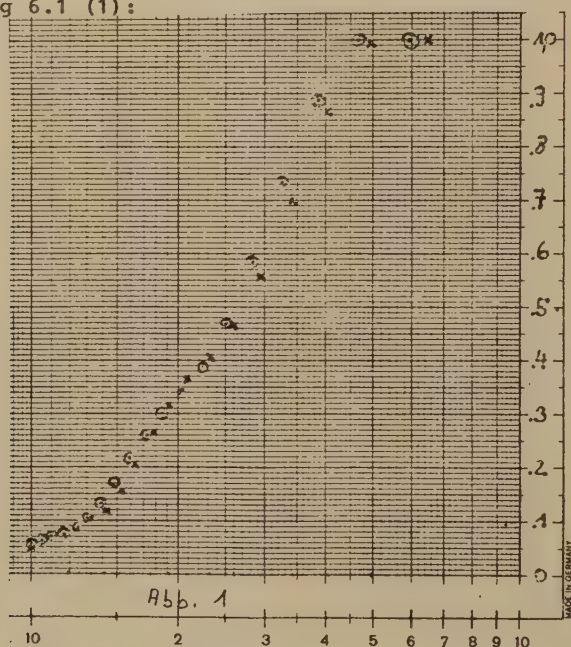
Abb. 5

Um die Lage der Sternabsorptionslinie gegenüber der Emission festlegen zu können, müßte man Radialgeschwindigkeitsmessungen der höheren Wasserstofflinien zur Verfügung haben. Erst dann könnte eine sinnvolle Anpassung des $H\beta$ Profils versucht werden.

6.2 ψ Per

Als zweites Beispiel wurde ein Stern mit relativ stark ausgebildeter Hülle gewählt. ψ Per (HD 22192) zeigt eine tiefe Zentralabsorption in der H α Emissionslinie. Die Meßwerte wurden wieder der Arbeit von Gray [22] entnommen. Der Spektraltyp wird mit B5Ve angegeben, die Rotationsgeschwindigkeit mit $v_{\text{rot}} \cdot \sin i = 398 \text{ km/s}$.

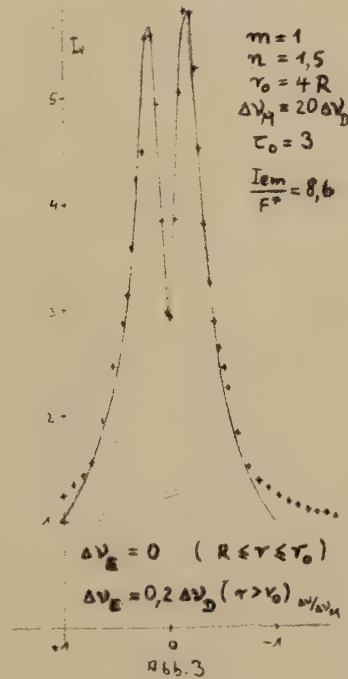
Abbildung 1 zeigt die Meßwerte in der gleichen Darstellung wie Abbildung 6.1 (1):



Durch Vergleich mit den Abbildungen 6. (1-7) erhält man:

$$4 \leq (r_0/R)^m \leq 4,5 \quad \text{und} \quad n' \approx 1,5.$$

Eine rechnerische Anpassung wurde für zwei Modelle versucht. Abbildung 2 zeigt ein gerechnetes Profil für den Fall, daß die H II - Zone mit einer Geschwindigkeit von 29,85 km/s kontrahiert ($\Delta v_E = -1,5 \Delta v_D$), die H I - Zone aber keine Relativbewegung zum Stern besitzt. Abbildung 3 zeigt ein gerechnetes Profil für den Fall, daß die H II - Zone ruht und die H I - Zone mit 3,98 km/s expandiert ($\Delta v_E = 0,2 \Delta v_D$). Die Meßwerte aus [22] sind als Kreuze eingetragen.



Im ersten Fall liegt die zentrale Absorption symmetrisch zu den Emissionsflanken, im zweiten Fall ist sie um 4 km/s (0,5 % der gesamten Linienbreite) in Richtung kürzerer

Wellenlängen verschoben. Eine gute Radialgeschwindigkeitsmessung (z.B. mit der Barwigschen Apparatur [28]) kann natürlich beide Fälle trennen. Es ist jedenfalls bemerkenswert, daß auch bei tiefer Zentralabsorption aus $V/R < 1$ (V/R ist das Verhältnis der Intensität des blauen Linienflügels zu der des roten) nicht unbedingt auf Expansion der Hülle geschlossen werden kann!

Erfreulicherweise zeigt dieses Beispiel aber auch, daß selbst bei größerem Streuanteil bei der Linienbildung die einfache (in 6. dargestellte) Methode zur Bestimmung von n' und r_0 anwendbar ist, obwohl zur Herleitung der Profile in Abb. 6. (1-7) keine Streuung berücksichtigt wurde. Die Streuzone beeinflusst nämlich nur die Bildung der Linienmitte.

Zum Schluß sollen noch einige charakteristische Größen der Hüllen von ψ Per und 66 Oph aus den bisherigen Ergebnissen abgeleitet werden. Aus 4.2 (9) folgt

$$R \cdot N^2(R) = \frac{2n-3}{1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^{(2n-3)}} \cdot \frac{f^*(T_0)}{f_e(T_e)} \quad (n \neq 3/2) \quad (1)$$

bzw. für $n = 1,5$

$$R \cdot N^2(R) = \frac{1}{\ln \frac{r_0}{R}} \cdot \frac{f^*(T_0)}{f_e(T_e)}$$

Andererseits erhält man aus 4.2.3 (3)

$$R N^2(R) = \frac{(2\pi m_e k_B)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2}{g_k} \cdot \frac{4\pi}{A_{k2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Delta v_D}{L v_{12}} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{b_k \cdot e^{h\nu_k/k_B T_e}} \cdot I_{em} \quad (2)$$

und speziell für H α

$$R N^2(R) = 2,05 \cdot 10^{24} \text{ erg}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3} \text{ K}^{-3/2} \cdot \frac{I_{em}}{F^*} \cdot \frac{\Delta v_D}{\Delta v_H} \cdot \frac{v_0}{c} a_{ini} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{b_3 \cdot e^{\frac{12650 \text{ K}}{T_e}}} \quad (3)$$

mit $n = 1,5$ (mit $m = 1$)

$$r_0/R = 4$$

$$\Delta v_M = 20 \Delta v_D$$

$$I_{em}/F^* = 8,9$$

$$v_0 \text{ rot} \cdot \sin i = 398 \text{ km/s}$$

$$F^* = B_v(T^*)$$

$$b_3 = \begin{cases} 0,12 & \text{für } T_e = 10\,000 \text{ K} \\ 0,67 & \text{für } T_e = 20\,000 \text{ K} \end{cases}$$

erhält man aus (1) und (3):

$$R \cdot N^2(R) = \begin{cases} 9,3 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-5} & \text{für } T_e = 10\,000 \text{ K} \\ 1,1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-5} & \text{für } T_e = 20\,000 \text{ K} \end{cases}$$

$$T^* = \begin{cases} 17\,000 \text{ K} & \text{für } T_e = 10\,000 \text{ K} \\ 16\,500 \text{ K} & \text{für } T_e = 20\,000 \text{ K} \end{cases}$$

O. Mohler findet für denselben Stern $T^* = 18\,000 \text{ K}$ mit Hilfe einer modifizierten Zanstramethode [24].

Mit dem Wert $R = 2,2 R_\odot$ [24] erhält man

$$N(R) = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3} \quad (\text{für } T_e = 10\,000 \text{ K}).$$

Die Gesamtmasse der ionisierten Hülle beträgt

$$M = 4\pi M_H \cdot N(R) \cdot R^{4,5} \int_R^{r_0} v^{0,5} dv = 4,4 \cdot 10^{-11} M_\odot$$

Aus 4.1.2 (7) erhält man

$$N_2(r_0) \cdot r_0 = \frac{\tau_0 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Delta v_0}{\frac{h \nu_{21}}{c} \cdot B_{23}}$$

$$= 4,78 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2} \cdot \frac{v_0}{c} \sin i \cdot \frac{\Delta v_0}{\Delta v_H} \cdot \tau_0$$

Mit obigen Werten und $\tau_0 = 3$ folgt

$$N_2(r_0) \cdot r_0 = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$$

und mit $R = 2,2 R_\odot$

$$N_2(r_0) = 15,5 \text{ cm}^{-3}$$

also

$$N_2(r_0)/N(r_0) = 4,96 \cdot 10^{-10}$$

Diese Besetzung des zweiten Zustandes würde im thermodynamischen Gleichgewicht bei $T = 5200 \text{ K}$ erreicht.

Da bei 66 Oph offenbar keine H I - Zone auftritt, gilt für $m = 1$

$$r_0/R \geq 4,2 \quad n = 1,2$$

$$\text{Mit } v_{\text{rot}} \cdot \sin i = 241 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_H = 20 \Delta v_D$$

$$I_{\text{em}}/F^* = 2,3$$

$$F^* = B_\nu(T^*)$$

ergibt sich auf gleiche Weise wie bei der Rechnung für ψ_{Per} (für $T_e = 10000 \text{ K}$)

$$RN^2(R) \geq 1,1 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-5}$$

$$T^* \geq 14500 \text{ K}$$

Tabelle der verwendeten Symbole

a	Atomarer Linienabsorptionskoeffizient
A_{ki}	Einsteinsche Übergangswahrscheinlichkeitskoeffizienten
B_{ki}	
B_{ik}	
b_k	Relative Besetzungszahl des k-ten Zustandes
c	Lichtgeschwindigkeit
g_i	Statistisches Gewicht des Zustandes i
g_{ki}	Gauntfaktor für den Übergang $k \rightarrow i$
h	Plancksches Wirkungsquantum
k_B	Boltzmannkonstante
K	Konstante, definiert auf Seite 16
m_e	Elektronenmasse
M_H	Masse des Wasserstoffatoms
N	Gesamtzahl der betreffenden Atome pro cm^3
N^+	Zahl der Ionen pro cm^3
N^-	Zahl der Elektronen pro cm^3
N_i	Zahl der betreffenden Atome pro cm^3 im Zustand i
r_o	Radius der Emissionszone (Strömgrenradius)
r_1	Radius der Streuzone
R	Sternradius
R_y	Rydbergkonstante
ν_{ik}	Frequenz für den Übergang $i \rightarrow k$
ν_i	Frequenz für den Übergang $i \rightarrow \infty$
κ_ν	Linienabsorptionskoeffizient pro Längeneinheit
$\Delta\nu_D$	Dopplerbreite der Profilfunktion des Absorptionskoeffizienten

Kurzbezeichnungen:

LTE	Lokales thermodynamisches Gleichgewicht
NLTE	nicht LTE

Literatur

- 1 O.Struve, ApJ 73 (1931) 94
- 2 R.B.Baldwin, Sky & Tel. 1, No 9 (1942) 5
- 3 A.P.Cowley, J.M.Marlbrough, PASP 80 (1968) 42
- 4 D.L.Edwards, MN 104 (1944) 283
- 4a D.L.Edwards, Vistas in Astr. 2 (1956) 1470
- 5 P.Wellmann, Die Sterne 21 (1941) 57
- 6 G.R. & E.M. Burbidge, ApJ 117 (1953) 407
- 7 T.Kogure, A&A 1 (1969) 253
- 8 C.Aydin, M.Hack, S.Islik, Publ. Trieste 330 (1965)
- 9 H.G.Groth, P.Wellmann, Proc. of the IAU Coll. No 2
München (1969) 87
- 10 G.P.Kuiper, O.Struve, B.Strömgren, ApJ 86 (1937) 593
B.Strömgren, ApJ 89 (1939) 526
B.Strömgren, ApJ 108 (1948) 252
- 11 G.Pöllitsch, Diplomarbeit an der Univ. Sternwarte
München (1970)
- 12 D.H.Menzel, J.G.Baker, ApJ 86 (1937) 70
- 13 D.H.Menzel, ApJ 85 (1937) 330
- 14 W.Kalkofen, Proc. IAU Coll. No 2 München (1969) 130
- 15 A.M.Delplace, A&A 7 (1970) 68
- 16 S.Saito, Kyoto Contr. 69 (1956)
- 17 K.Wurm, Die Planetarischen Nebel (Berlin 1951) 80
- 18 Griem, Phys. Rev. 131 (1963) 1170
- 19 D.H.Menzel, J.G.Baker, ApJ 88 (1938) 52
- 20 J.T.Jefferies, Spectral Line Formation (New York 1968) 24
- 21 H.H.Stroud, Appr.Calc. of Multiple Integrals (Englewood
Cliffs 1971)
- 22 D.F.Gray, J.M.Marlbrough, ApJ Suppl. 27 (1974) 121
- 23 W.Seitter, H.Dürbeck, B.Kowatschew, Mitt. AG 35 (1974) 188
- 24 O.Mohler, Michigan Obs. Publ. V No. 5 (1934)
- 26 R.Häfner, private Mitteilung
- 27 P.Wellmann, ZfA 18 (1939) 142
- 28 H.Barwig, Diplomarbeit (1969)

Herrn Prof. Dr. P. Wellmann und Herrn Prof. Dr. H.-G. Groth
verdanke ich viele wertvolle Anregungen und Hinweise bei der
Durchführung dieser Arbeit.

Meine Kollegen am Institut halfen durch Diskussionen, vor allem
Herr P. Escher durch praktische Ratschläge bei der Programmierung.
Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Lebenslauf

Name: Gerd Franz Pöllitsch

Geburtsdatum: 31. Juli 1941

Geburtsort: Graz (Österreich)

Eltern: Josef Pöllitsch und Theres Pöllitsch, geb. Stefling

Schulen: Volksschule in Mureck (1947 - 1951)
Hauptschule in Mureck (1951 - 1954)
1. Bundesrealgymnasium in Graz (1954 - 1956)
Couven-Gymnasium in Aachen (1956 - 1957)
Carl-Humann-Gymnasium in Essen (1957 - 1959)
Gisela-Oberrealschule in München (1959 - 1962)

Studium: WS 1962 bis SS 1970 Physik in München
Diplomprüfung Physik; Thema der Arbeit:
Die Wasserstofflinien in Hüllenspektren

Tätigkeit: Oktober 1970 bis heute
Verwalter einer wiss. Assistentenstelle am
Institut für Astronomie und Astrophysik, München

